

4. Cvičení z MA I. (26.3.2021)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Na webu viz druhou sérii domácích úkolů – termín odevzdání 9.4.2021!

Limity posloupností

1. Dokažte nebo vyvráťte následující tvrzení ($\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel):

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = a$

(c) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

(d) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

2. Spočítejte následující limity (nebo dokažte, že neexistují):

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 - 2n^2 + 10$

Příklady z minula:

(j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}$

(k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sqrt{n}|}{\sqrt{n}}$

(l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{k=1}^n k}{n+2} - \frac{n}{2} \right)$

3. Mějme dvě posloupnosti reálných čísel $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ a číslo $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ – dokažte následující:

(a) Pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = +\infty$.

(b) Pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}$ omezená, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 0$.

4. Najděte posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ ($a_n, b_n \in \mathbb{R}$) takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ a že:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$

5. ‘Škála limit’ – určete, čemu se rovnají následující limity (pro $q \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$):

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot q^n$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \cdot q^n$... DŮ!

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n!}$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n!}$

ZÁVĚR: $n^n \gg n! \gg q^n \gg n^k$ (pro pevné $k \in \mathbb{N}$ a $q \in \mathbb{R}$, $q > 1$)

6. A ještě n -tá odmocnina:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}$ (kde $a \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$ je pevný parametr)

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ (viz přednáška 2, tvrzení 14)

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$