

3. Cvičení z MA I. (19.3.2021)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Na webu viz první sérii domácích úkolů – termín odevzdání 26.3.2021!

A. Supremum a infimum

1. Najděte suprema a infima následujících množin nad reálnými čísly \mathbb{R} (pokud existují); existují pro ně maxima a minima? (z minulého cvičení)

(a) $A_1 = \{-\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$ (b) $A_2 = \{\frac{n+(-1)^n}{n}; n \in \mathbb{N}\}$

(c) $A_3 = \{n^{(-1)^n}; n \in \mathbb{N}\}$ (d) $A_4 = \{q < \sqrt{3}; q \in \mathbb{Q}\}$

B. Posloupnosti a limity

Co je to posloupnost, monotónní posloupnost? Definujte vlastní a nevlastní limitu posloupnosti.

2. Rozhodněte, zda jsou následující posloupnosti monotónní.

(a) $\{\frac{n+1}{n+2}\}_{n=1}^{\infty}$ (b) $\{2n + (-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$

3. Najděte dvě různé posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ takové, že $\{a_n\}$ je podposloupností $\{b_n\}$ a naopak.

4. Spočítejte přímo podle definice limity posloupnosti.

(a) $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ (b) $\{\frac{1}{1+n^2}\}_{n=1}^{\infty}$

5. Spočítejte následující limity (nebo dokažte, že neexistují):

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(-1)^n$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \log n$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^2(n\pi/4)$ (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin n^2$

(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+5n}{-n^2+4n}$ (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+5^n+10^n}{-2^{n+1}+5^{n+1}+10^{n+1}}$

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+5} - \sqrt{n-1}$ (j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}$

(k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sqrt{n}|}{\sqrt{n}}$ (l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k}{n+2} - \frac{n}{2}$

(m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}$ (kde $a \geq 0, a \in \mathbb{R}$ je pevný parametr)

(n) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ (viz přednáška2, tvrzení 14)

6. Dokažte nebo vyvráťte následující tvrzení:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = a$

(c) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

(d) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$