

13. Cvičení z MA I. (4. 6. 2021)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Newtonův integrál

1. (= 2 z minula) Spočítejte následující Newtonovy integrály (příp. zdůvodněte, proč neexistují).

$$(f) \int_0^1 \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx \quad (g) \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+3} dx \quad (i) \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$$

Riemannův integrál.

DEFINICE: Mějme čísla $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Koněčná $(k+1)$ -tice bodů $D = (a_0, a_1, \dots, a_k)$, $a_i \in [a, b]$ je dělením *dělením intervalu* $[a, b]$, pokud $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k = b$.

Označme intervaly $I_i = [a_i, a_{i+1}]$ a jejich délku jako $|I_i| (= a_{i+1} - a_i)$, obdobně $[a, b] = b - a$.

(i) Pro funkci $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a dělení $D = (a_0, a_1, \dots, a_k)$ intervalu $[a, b]$ definujeme *dolní*, respektive *horní Riemannovu sumu* jako:

$$s(f, D) = \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| m_i, \text{ resp. } S(f, D) = \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| M_i,$$

kde $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in I_i\}$ a $M_i = \sup\{f(x) \mid x \in I_i\}$.

(Tyto sumy jsou vždy definované, $s(f, D) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $S(f, D) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.)

(ii) *Dolní*, resp. *horní Riemannův integrál* funkce f na intervalu $[a, b]$ definujeme jako

$$\int_a^b f(x) dx = \sup\{s(f, D) \mid D \text{ je dělení } [a, b]\}, \text{ resp. } \overline{\int_a^b f(x) dx} = \inf\{S(f, D) \mid D \text{ je dělení } [a, b]\}.$$

(Tyto výrazy jsou vždy definované, $\int_a^b f, \overline{\int_a^b f} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.)

(iii) Řekneme, že funkce f má na $[a, b]$ *Riemannův integrál* (je *riemannovsky integrovatelná*), pokud se dolní a horní Riemannův integrál rovnají a jsou konečné – tuto hodnotu označujeme jako $\int_a^b f(x) dx$ (případně $(R) \int_a^b f(x) dx$).

PLATÍ: Pro každou f na $[a, b]$ platí, že $\int_a^b f \leq \overline{\int_a^b f}$.

PLATÍ: (Kritérium integrovatelnosti) Nechť je f definovaná na $[a, b]$. Potom $\exists (R) \int_a^b f$ právě tehdy, když

$$\forall \epsilon > 0 \exists D : S(f, D) - s(f, D) < \epsilon$$

PLATÍ: Každá riemannovsky integrovatelná funkce je omezená.

PLATÍ: “aritmetika” R. integrálů $(\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g)$.

PLATÍ: “linearita” vzhledem k integračním intervalům $(\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ pro $a < c < b$ a pokud má aspoň jedna strana smysl)

PLATÍ: funkce lišící se v kon. mnoha bodech mají stejný R. integrál

PLATÍ: Je-li funkce f na $[a, b]$ monotónní, pak je R. integrovatelná.

PLATÍ: Je-li funkce f na $[a, b]$ spojitá, pak je R. integrovatelná.

2. Určete z definice hodnotu Riemannova integrálu $(R) \int_{-2}^2 [x] dx$.

3. Jaký je vztah mezi Riemannovým a Newtonovým integrálem?

Aplikace integrálu.

A. S použitím Riemannova integrálu:

(a) Odhadněte shora číslo $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ a na základě toho dokažte, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konverguje.

(b) Odhadněte zdola číslo $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ a na základě toho dokažte, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverguje.

B. Plocha pod křivkou ... viz definici R. integrálu.

Pro křivku $y = f(x)$ (pro $x \in [a, b]$) má plocha pod křivkou obsah $\int_a^b f(x) dx$.

C. Délka křivky ... viz domácí úkol.

Délka křivky $y = f(x)$ (pro $x \in [a, b]$) je dána předpisem $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

(a) Najděte délku křivky $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ na intervalu $x \in [0, 3]$.

D. Objem rotačního tělesa.

Objem rotačního tělesa vzniklého rotací křivky $y = f(x)$ (pro $x \in [a, b]$) kolem osy x je $\int_a^b \pi(f(x))^2 dx$.

(a) Necht M je oblast ohraničená grafem funkce $f(x) = \sqrt{x \cdot \sin x}$ a osou x na intervalu $[0, \pi]$. Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací M kolem osy x .

(b) Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací funkce $y = \sqrt[3]{x}$ pro $y \in [1, 2]$ kolem osy y .

E. Povrch rotačního tělesa.

Povrch tělesa vzniklého rotací křivky $y = f(x)$ (pro $x \in [a, b]$) kolem osy x je $\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

(a) Povrch paraboloidu (satelitní antény) vzniklého rotací křivky $y = c\sqrt{x}$ pro $x \in [0, b]$.

(b) Povrch nekonečného "trychtýře" vzniklého rotací funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ pro $x \in [1, \infty)$ kolem osy x .