

12. Cvičení z MA I. (28. 5. 2021)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Primitivní funkce

1. (= 4 z minula) Určete primitivní funkce (doplnění na čtverec a rozklad na parciální zlomky):

$$(a) \int \frac{x^2+2x}{x+3} dx \quad (b)^* \int \frac{3x+4}{x^2+3x+5} dx \quad (c) \int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$$

$$(d) \int \frac{1}{(3x^2-2x-1)} dx \quad (e) \int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3} dx \quad (f) \int \frac{1}{\sqrt{8+6x-9x^2}} dx$$

Newtonův integrál

DEF: Mějme funkci f definovanou na otevřeném neprázdném intervalu (a, b) , $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Tato funkce má na intervalu (a, b) *Newtonův integrál*, když má na tomto intervalu primitivní funkci F a ta má vlastní jednostranné limity $F(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$ a $F(b^-) = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$.

Newtonův integrál funkce f na intervalu (a, b) pak definujeme jako

$$(N) \int_a^b f(x) dx := F(b^-) - F(a^+) = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) \quad (=: [F]_a^b)$$

V (*Per partes pro určitý integrál*): Nechť f a g jsou spojité funkce na $[a, b]$ a nechť tyto funkce mají na (a, b) primitivní funkce F a G takové, že je lze spojitě rozšířit na $[a, b]$. Potom existují dva určité integrály z následujícího výrazu a platí následující rovnost:

$$(N) \int_a^b f(x)G(x) dx = [FG]_a^b - (N) \int_a^b F(x)g(x) dx$$

V (*Substituce pro určitý integrál*): Nechť $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a má ve všech bodech (α, β) vlastní derivaci. Označme $J := \varphi([\alpha, \beta])$.

(Ze spojitosti φ na $[\alpha, \beta]$ víme, že J je omezený.)

Nechť f je spojitá na J a newtonovsky integrovatelná na vnitřku J . Potom:

$$(N) \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = (N) \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx$$

2. Spočítejte následující Newtonovy integrály (případně zdůvodněte, že neexistují).

$$(a) \int_0^1 x^\alpha dx, \alpha \in \mathbb{R} \quad (b) \int_0^\infty \sin x dx \quad (c) \int_0^5 |x^2 - 3x + 2| dx$$

$$(d) \int_a^b \operatorname{sgn} x dx \quad (e) \int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx \quad (f) \int_0^1 \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$$

$$(g) \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x+3}} dx \quad (h) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 x \cdot \cos x dx \quad (i) \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$$

Riemannův integrál.

DEF:

3. Určete z definice hodnotu Riemannova integrálu:

Platí: Pro $a < b < c$ reálná je $(R) \int_a^c f(x) \, dx = (R) \int_a^b f(x) \, dx + (R) \int_b^c f(x) \, dx$, pokud má (aspoň) jedna strana smysl.

(a) $(R) \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx$

(b) $(R) \int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(x) \, dx$

4. Jaký je vztah mezi Riemannovým a Newtonovým integrálem?