2.-3. Cvičení z MA II. (27. 2. a 6. 3. 2019)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Co jsou to primitivní funkce? Jaké má vlastnosti (spojitost)? Kdy má funkce primitivní funkci (spojitost)?

1. Určete primitivní funkce k následujícím funkcím (na největších možných intervalech):

(a) $\int x^3 + 2x + \frac{16}{x}\,\mathrm{d}x$ (b) $\int 18e^x + 16e^{8x} - \frac{1}{x} + 3\cos x\,\mathrm{d}x$ (c) $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$

(d) $\int (3e^x + \frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$ (e) $\int (\frac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{x})\,\mathrm{d}x$ (f) $\int \frac{x^2-1}{x}\,\mathrm{d}x$

(g) $\int (\sqrt[3]{x} + x^2)\,\mathrm{d}x$ (h) $\int \mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$ (i) $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

2. Per partes:

(a) $\int \log x\,\mathrm{d}x$ (b) $\int (x^2 - x)\exp(x)\,\mathrm{d}x$ (c) $\int x\sin x\,\mathrm{d}x$

(d) $\int e^x(\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x$ (e) $\int \sqrt{x}\log^2 x\,\mathrm{d}x$ (f) PRESUN k substitucim $\int \sin^7 x\cos x\,\mathrm{d}x$

(g) $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ (h) $\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$ (i) $\int x^n e^x\,\mathrm{d}x$, kde $n \geq 0$

3. ‘Lepení’ primitivních funkcí – určete primitivní funkco na největším možném intervalu:

(a) $\int |x|\,\mathrm{d}x$ (b) $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $f(x) = 0\ (x \leq 0)$, $f(x) = x\ (x > 0)$

(c) $\int \sqrt{x^6}\,\mathrm{d}x$ (d) $\int |\cos x|\,\mathrm{d}x$

ZDE ROZDELIT NA 2 UKOLY

4. Určete primitivní funkce: metoda substituce.

(a) $\int \sqrt[3]{1-3x}\,\mathrm{d}x$ (b) $\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ (c) $\int \frac{x}{\sqrt{2+5x^2}}\,\mathrm{d}x$

(d) $\int \frac{\log^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$ (e) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}}\,\mathrm{d}x$ (f) $\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

(g) $\int \mathrm{tg}\ x\,\mathrm{d}x$ (h) $\int \mathrm{cotg}\ x\,\mathrm{d}x$ (i) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(j) $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ (k) UKOL $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$

5. Určete primitivní funkce: doplnění na čtverec a rozklad na parciální zlomky.

(a) $\int \frac{1}{(3x^2-2x-1)}\,\mathrm{d}x$ (b) $\int \frac{1}{\sqrt{8+6x-9x^2}}\,\mathrm{d}x$ (c) $\int \frac{x^2+2x}{x+3}\,\mathrm{d}x$

(d) $\int \frac{3x+4}{x^2+3x+5}\,\mathrm{d}x$ (e) VYHODIT, to je (a) $\int \frac{1}{(3x+1)(x-1)}\,\mathrm{d}x$ (f) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,\mathrm{d}x$

(g) $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}\,\mathrm{d}x$ (h) $\int \frac{2x}{(x+1)(x^4+2x^2+1)}\,\mathrm{d}x$ (i) $\int \frac{8+6x-2x^2}{x^4-4x+3}\,\mathrm{d}x$

(j) UKOL $\int \frac{x}{(x^2+2x+2)^2(x^2+2x-3)}\,\mathrm{d}x$

Tipy pro substituce:

- 'mocnina' ... $t = ax^k + b$ ($dt = akx^{(k-1)}dx$)
- goniometrické ...$R = \frac{P}{Q}$, kde P, Q polynomy

  $t = \sin x$, pokud $R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, -\cos)$, tj. 'lichá wrt $\cos x$'

  $t = \cos x$, pokud $R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos)$, tj. 'lichá wrt $\sin x$'

  $t = \mathrm{tg}\ x$, pokud $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos)$, tj. 'sudá wrt $\sin x, \cos x$'

  $t = \mathrm{tg}\ \frac{x}{2}$, univerzální, ale nepříjemná
- odmocnina ...

  $t = \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, pro $R(x, \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}), q \in N, ad - bc \neq 0, a, b, c, d \in R$

  $t = \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, pro $\sqrt[q_1]{S^{p_1}}, ... \sqrt[q_n]{S^{p_n}}$; $S = (\frac{ax+b}{cx+d})$; $s = NSN(q_1, ...q_n)$
- eulerova ... $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t$ nebo $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$,

  pokud $ax^2 + bx + c$ nemá R kořeny a $a > 0, c > 0$

Domácí úkol na 4. 3. 2019:

Vypočítejte na celém intervalu, kde to dává smysl:

(1) $\int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x$, kde $n \in N, a \in R$

(2) $\int |\sin x + \cos x|\,\mathrm{d}x$

(3) $\int 5^x \sin x\,\mathrm{d}x$

(4) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: (až na c)

1a. $\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 16\log|x|$, na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$
1b. $18e^x + 2e^{8x} - \log|x| + 3\sin x$, na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$
1c. $\frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2}$, na R
...

2a. 2b. $(x^2 - 3x + 3)\exp x$, na R
2c. $\sin x - x\cos x$, na R
2d. $e^x \sin x$, na R
2e. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}(\log^2 x - \frac{4}{3}\log x + \frac{8}{9})$, na $(0, +\infty)$
2f. $\frac{1}{8}\sin^8 x$, na R
2g. $\frac{1}{2}(\frac{x}{1+x^2} + \text{arctg } x)$, na R
2h. $I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}I_n$, pro $n \in N$ na R
2i. $J_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \cdot x^{n-k}$

3a. $\text{sgn}(x) \cdot \frac{x^2}{2}$, na R
3b. $F(x) = c$ na $< -\infty, 0 >$, $F(x) = \frac{x^2}{2}$ na $< 0, \infty >$
3c. $\frac{1}{4}|x| \cdot x^3$, na R
3d. $(-1)^k \sin x + 2k$, na $x \in < -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi >, k \in Z$

4a. $-\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}$, na R
4b. $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}$, na R
4c. $\frac{1}{5} \cdot \sqrt{2 + 5x^2}$, na R
4d. $\frac{1}{3}\log^3 x$, na $(0, +\infty)$
4e. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{2}$, na $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
4f. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$, na R
4g. $-\log|\cos x|$, na každém $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in Z$
4h. $\log|\sin x|$, na každém $(k\pi, (k+1)\pi), k \in Z$
4i. $2\sqrt{x} - 2\log|1 + \sqrt{x}|$ na $(0, +\infty)$
4j. $\frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2})$, na $(-1, 1)$
4k. $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}$, na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$

5a.
5b. $\frac{1}{3} \cdot \arcsin(x - \frac{1}{3})$, na $(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$
5c. $\frac{x^2}{2} - x + 3\ln|x+3|$, na $(-\infty, -3)$ a na $(-3, \infty)$
5d. $\frac{3}{2}\ln(x^2 + 3x + 5) - \frac{1}{\sqrt{11}}$ arctg $\frac{1}{\sqrt{11}}(2x+3)$, na R
5e. $F(x) = \frac{1}{4}\log|\frac{x-1}{3x+1}|$, na $(-\infty, -\frac{1}{3})$ a na $(-\frac{1}{3}, 1)$ a na $(1, \infty)$
5f. $\log|x-2| + \log|x+5|$ na $(-\infty, -5)$ a na $(-5, 2)$ a na $(2, \infty)$
5g. $\frac{1}{2}(x+1)^2 + \log|x-1| - \frac{1}{2}\log(x^2+1) -$ arctg x na $(-\infty, 1)$ a na $(1, \infty)$
5h. $F(x) = -\frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{1}{4}\log(x^2+1) + \frac{1}{2}\frac{x-1}{x^2+1}$, na $(-\infty, -1)$ a na $(-1, \infty)$
5i.
5j. $F(x) = -\frac{1}{50}\log(x^2 + 2x + 2) + \frac{1}{10}\frac{x+2}{x^2+2x+2} + \frac{1}{100}\log|x-1| + \frac{3}{100}\log|x+3| + \frac{7}{50}$arctg $(x+1)$, na $(-\infty, -3)$, na $(-3, 1)$ a na $(1, \infty)$