6. Cvičení z MA II. (27.3.2019)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Určitý integrál. Jak se definuje Riemannův integrál a jaké jsou nutné / postačující podmínky pro jeho existence? Jak se definuje Newtonův integrál a jaké jsou nutné / postačující podmínky pro jeho existence? Vztah Newtonova a Riemannova integrálu

1. Riemannův určitý integrál z definice:

(Dú) $(R)\int_{-2}^{2}\lfloor x\rfloor \ \mathrm{d}x$, kde $\lfloor x\rfloor$ je celá část x

2. Metody pro výpočet určitého integrálu: výpočet pomocí primitivní funkce, per partes, substituce.

(a) $\int_0^1 x^\alpha \ \mathrm{d}x$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (b) $\int_0^\infty \sin x \ \mathrm{d}x$ (c) $\int_0^5 |x^2-3x+2| \ \mathrm{d}x$

(d) $\int_1^e x^2 \ln x \ \mathrm{d}x$ (e) $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \ \mathrm{d}x$ (f) $\int_0^\pi \frac{1}{1+3\sin^2 x} \ \mathrm{d}x$

3. Příklady k (domácímu) procvičování:

(a) $\int_{-\sqrt{3}}^1 \frac{1}{1+x^2} \ \mathrm{d}x$ (b) $\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ \mathrm{d}x$ (c) $\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \ \mathrm{d}x$

(d) $\int_0^8 \sqrt{1+x} \ \mathrm{d}x$ (e) $\int_0^\pi \frac{\sin 2x}{\sin x}\mathrm{d}x$ (f) $\int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{1}{x^2-2x+2} \ \mathrm{d}x$

(g) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 x \cos x \ \mathrm{d}x$ (h) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x \ \mathrm{d}x$ (i) $\int_0^{\frac{11\pi}{6}} \sin^2 x \ \mathrm{d}x$

4. Aplikace určitého integrálu: plocha rovinného útvaru, délka oblouku křivky a objem rotačního tělesa pomocí integrálu – k procvičení doma (pouze využití vzorečků z přenášky), **viz zvláštní papír s příklady, tam i bonusové úkoly.**

Dú. Spočítejte (na 1.4.2019)

(a) $\int_3^5 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} \ \mathrm{d}x$

(b) $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \ \mathrm{d}x$ **, kde** $n \in \mathbb{N}$

(c) $\int_0^a |\cos x| \ \mathrm{d}x$ **, kde** $a = \frac{49}{6}\pi$

Řešení:

Řešení: **(až na** c**)**

Dú. -2
2a. pro $\alpha \leq -1$ **neex., pro** $\alpha > -1 ... \frac{1}{\alpha+1}$ **2b. neex.** **2c.** $\frac{7\pi}{12}$ **2d.** $\frac{\pi}{3}$ **2e.** $-\frac{\pi}{3}$ **2f.** $\frac{52}{3}$ **2g.** 0 **2h.** $\frac{\pi}{12}$ **2i.** $\frac{29}{2}$ **3a.** $\frac{1}{9}(2e^3+1)$ **3b.** $\frac{1}{4}(\pi-2)$ **3c.** 2^{-6} **3d.** $\frac{\pi}{4}$ **3e.** $\frac{\pi}{2}$ **3f.** 0 **3g. neex.**