

1. Cvičení z MA II. (20. 2. 2019)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

A. Aplikace průběhů funkcí

Jak se pomocí derivace pozná, kde má funkce maximum/minimum? Kde je rostoucí/klesající? Co je tečna funkce v daném a jak souvisí s konvexitou?

1. Který z obdélníků o obvodu l má největší obsah?
2. Který z válců o objemu V má nejmenší povrch?
3. Z čtvercového listu papíru odstříhneme v rozích malé čtverce a složíme krabíčku (bez víka). Jak velké čtverce máme odstříhnout, aby vzniklá krabíčka měla co největší objem?
4. Bazén má mít tvar pravoúhlého rovnoběžnostěnu s objemem 200 m^3 . Délka má být čtyřnásobkem šířky. 1 m^2 základny je dvakrát levnější než 1 m^2 stěny. Jaké mají být rozměry bazénu, aby její stavba byla nejlevnější?
5. Z chodby o šířce A odbočuje chodba o šířce B . S jak dlouhou tyčí je možno zatočit? (Pro jednoduchost: tyč chceme nést vodorovně.)

B. Taylorův polynom

Co je Taylorův polynom funkce f v zadaném bodě a (značení $T_n^{f,a}$)? Jak je tento polynom charakterizován (pro $x \rightarrow a$)?

1. Najděte Taylorův polynom (řádu např. 5 v bodě a) pro následující funkce:

- | | |
|---|----------------------|
| (a) $f(x) = \operatorname{tg} x, a = 0$ | (b) $f(x) = e^x$ |
| (c) $f(x) = \log(1+x)$ | (d) $f(x) = \sin x$ |
| (e) $f(x) = \cos x$ | (f) $f(x) = (1+x)^2$ |

2. Najděte Taylorův polynom řádu \mathbb{N} v bodě 0 pro následujících funkce. Konverguje tento polynom k zadané funkci (tj. pro $\mathbb{N} \rightarrow \infty$)?

- | | |
|--|--------------------------------|
| (a) $f(x) = e^{-x^2}$ | (b) $f(x) = xe^{2x}$ |
| (c) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pro $x \neq 0, f(0) = 0$ | (d) $f(x) = \frac{x}{9+x^2}$ |
| (e) $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$ | (f) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ |

3. Pomocí Taylorova polynomu spočítejte následující limity:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} \right).$

4. Spočítejte přibližně (můžete bez odhadu chyby) následující čísla: $\cos 0.1$, $\sqrt{0.98}$, $\sqrt[3]{1279.03}$, $e^{0.01}$, $\log 1.2$, $\sqrt[12]{1.03}$, 1.01^5 , ...

Domácí úkol na 25. 2. 2019:

1. Dokažte, že funkce $(1 + 1/x)^x$ je rostoucí ($x \in R^+$). [1 bod]

2. Odhadněte hodnotu $\sin 0,1 (= \sin(0,1))$. Pro která x můžeme odhadnout $\sin x$ jako $x - \frac{x^3}{3!}$ s přesností na tři desetinná místa? [1 bod]

3. Rozvedte následující funkci v (mocninnou) řadu: [1 bod]

$$y(x) = \frac{1}{1 + x + x^2 + x^3}$$

BONUS. Jak velký sněhulák (ze tří koulí) lze vyrobit z koule o poloměru 1 metr? [2 body]

Můžete (bez dokazování) užít tzv. Jensenovu nerovnost:

Pro konvexní funkci f na $\langle a, b \rangle$ a čísla $x_i \in \langle a, b \rangle$ a α_i taková, že $\alpha_i \in \langle 0, 1 \rangle$, $\sum_i \alpha_i = 1$ platí:

$$f\left(\sum_i \alpha_i x_i\right) \leq \sum_i \alpha_i f(x_i).$$

Řešení:

1. $T_5^{\text{tg},0}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$

2a. $\sum_{n=0}^{N/2} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^N \frac{-x^{2n}}{n!}$

2b. $\sum_{n=0}^{N-1} \frac{2^n x^{n+1}}{n!}$, pro $x \in \mathbb{R}$

2c. $\sum_{n=0}^N 0 \cdot x^n = 0$ nekonverguje k $f(x)$, $x \neq 0$

2d. $\sum_{n=0}^{(N-1)/2} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$, na $(-3, 3)$

2e. $2 \cdot \sum_{n=0}^{(N-1)/2} \frac{x^{2n+1}}{2^{n+1}}$ pro $|x| < 1$

2f. $\sum_{n=0}^N (n+1)x^n$, na $(-1, 1)$

3a. $-\frac{1}{12}$

4. 0.099 833, 0.995 004, 0.989 949, 12.002 3, 1.010 050, 0.182 321, 0.693 147, 1.002 466, 1.051 010