5. Cvičení z MA II. (20.3.2018)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Rozcvička:

(a) $\int \frac{\log x}{x(1+\log x)}\ dx$ (b) $\int \text{arctg}\,\sqrt{x}\ dx$ (c) $\int \arccos x\ dx$

(d) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\ dx$ (e)PRESUN do prikladu k procvicovani $\int x^2 \cdot e^x \cdot \sin x\, dx$

1. Najděte primitivní funkci - Eulerova substituce

$\int \frac{1}{x+(\sqrt{x^2+x+1})}\,dx$ (Nápověda: zkuste substituci $\sqrt{x^2+x+1} = x+t$)

2. Zvolte vhodnou substituci a spočítejte (na intervalech, které jsou 'přirozeným' definičním oborem výsledných primitivních funkcí):

(a) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\ dx$ (b) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\ dx$ (c) $\int \frac{1}{5+4\sin x}\ dx$

3. Příklady k procvičování:

(a) $\int \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}\ dx$ (b) $\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\ dx$ (c) $\int \frac{1}{\sin x\cos^4 x}\ dx$

(d) $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\ dx$ (e) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ dx$ (f) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\ dx$

(g) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+5x+1}}\ dx$

4. Příklady písemkového typu (doc. Kalenda, cca 8 let staré):

(a) $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x+cosx+2}\ dx$ (b) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\ dx$ (c) $\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x^2-1)(x^2+x+1)}\ dx$

(d) $\int \frac{(\text{tg}\ x+\text{cotg}\ x)^2}{\sin^2 x-\cos^2 x}\ dx$ (e) $\int \frac{\sin x}{9\cos^2 x+2\sin^4 x}\ dx$

Určitý integrál. Jak se definuje Riemannův integrál?

5. Riemannův určitý integrál z definice:
(Platí: Pro $a < b < c$ reálná je ${}_{(R)}\!\int_a^c = {}_{(R)}\!\int_a^b + {}_{(R)}\!\int_b^c$, pokud má jedna strana smysl.)

(a) $(R)\int_{-\pi}^{\pi} 1\ dx$ (b) $(R)\int_{-1}^{1} \text{sgn}(x)\ dx$

Domácí úkol na 20.3.2018:

(1) $\int \frac{1}{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x} \, \mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} \, \mathrm{d}x$ (použijte Eulerovu substituci)

(3) Riemannův určitý integrál – určete z definice:

$(R) \int_{-2}^{2} \lfloor x \rfloor \, \mathrm{d}x$, kde $\lfloor x \rfloor$ je dolní celá část x

Zopakujte si definice a zatím probrané věty o určitém integrálu.

Řešení: (až na c)
Rozcvička:
a. $\log x - \log|1+\log x|$, na $(0,\frac{1}{e})$ a na $(\frac{1}{e},\infty)$ **b.** $(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$, na $(0,\infty)$ **c.** $x\cdot\arccos x-\sqrt{1-x^2}$, na $(-1,1)$ **d.** $-2\sqrt{1-x}\cdot\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}$, na $(0,1)$ **e.** $\frac{1}{2}e^x((x^2-1)\sin x-(x^2-1)^2\cos x)$, na $\mathbb{R}$

2a. $\log|x+\sqrt{x^2+1}| = \operatorname{argsinh} x$ na R **2b.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ arctg $(\sqrt{2}$ tg $x)-x)$, posun vždy o $-\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ **2c.** $\frac{2}{3}$ arctg $(\frac{1}{3}(5$ tg $\frac{x}{2}+4))$, mimo $(2k+1)\pi, k\in Z$, posun vždy o $\frac{2\pi}{3}$

3a. $-\frac{1}{1+\text{ tg } x}$, na D_f mimo $\frac{\pi}{2}+k\pi$, lze spoj. dodef. 0
3b. $\frac{1}{6}\log((1-\cos x)(2+\cos x)^2/(1+\cos x)^3)$, mimo $k\pi, k\in Z$ $(\equiv \frac{1}{3}\log(|t|(t^2+3))$, kde $t=$ tg $\frac{x}{2})$
2c. $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{3}\frac{1}{\cos^3 x}+\frac{1}{2}\log\sqrt{\frac{\cos x-1}{\cos x+1}}$ $(\equiv \frac{1}{\cos x}+\frac{1}{3}\frac{1}{\cos^3 x}+\log|\text{tg } \frac{x}{2}|)$, mimo $\frac{k\pi}{2}, k\in Z$
2d. $\log(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1})$, na R
3e. $\log|x+\sqrt{x^2-1}|$ na int. $(-\infty,-1)$ na $(1,\infty)$
3f. vede na $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\, \mathrm{d}x$
3g. $\log|\frac{t-1}{t+1}|$, kde $\sqrt{x^2+5x+1}=x+t$, tedy $\log\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-2}$

KALENDA **4a.** $\log\frac{t^2+2t+3}{t^2+1}+\frac{1}{\sqrt{2}}$ artcg $\frac{t+1}{\sqrt{2}}-\frac{1+t}{t^2+1}+k\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ na int. $((2k-1)\pi,(2k+1)\pi)$, kde $t=$tg $\frac{x}{2}$; lze "slepit" v krajních bodech (např. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ pro $x=\pi$)
4c. $-\frac{1}{6}\log|x-1|-\frac{1}{3(x-1)}+\frac{1}{2}\log|x+1|-\frac{1}{6}\log(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}$ arctg $\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ na $(-\infty,-1)$ a na $(-1,1)$ a na $(1,\infty)$
4d. tg $x+$cotg $x+2\log|\text{tg } x-1|-2\log|\text{tg } x+1|$ na int. $(\frac{k\pi}{4},\frac{(k+1)\pi}{4})$
4e. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ arctg $(\sqrt{2}\cos x)+\frac{1}{3\sqrt{2}}$arctg $\frac{\cos x}{\sqrt{2}}$ na R