13. Cvičení z MA II. (15.5.2019)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Věta o implicitních funkcích.

1. Je zadaná funkce $F(x, y)$ a dvě čísla x_0, y_0 taková, že $F(x_0, y_0) = 0$. Dokažte, že v nějakém okolí U bodu (x_0, y_0) existuje funkce $f = f(x)$ splňující podmínky $f(x_0) = y_0$ a $F(x, f(x)) = 0$ pro všechna $x \in U$. Určete $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$.

(a) $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4, \ (x_0, y_0) = (6, 2)$

(b) $F(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1, \ (x_0, y_0) = (0, 1)$

2. Mějme dvě funkde $f, g, \ (x = f(z), y = g(z))$, které jsou definovány rovnicemi
$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}z^2$ a $x + y + z = 2$ a podmínkami $f(2) = 1, \ g(2) = -1$.
Určete $f'(2), \ g'(2)$ a $f''(2), \ g''(2)$.

3. Ukažte, že zadanou množinu M lze na okolí daného bodu a popsat jako graf funkce f. Spočtěte její (parc.) derivace prvního a druhého řádu v příslušném bodu.

(a) $M = \{(x, y) \in R^2; \ (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0\}$ v okolí b. $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

(b) $M = \{(x, y) \in R^2; \ \log \sqrt{x^2 + y^2} = \ \text{arctg} \ \frac{y}{x}\}$ v okolí b. $(1, 0)$, kde $f(1) = 0$

Vázané extrémy – Lagrangeovy multiplikátory.

4. Zjistěte lokální extrémy funkcí na zadaných množinách – využijte Lagrangeovy multiplikátory.

(a) $f(x, y) = x + y$ na množině $M = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\}$

(b) $f(x, y) = x$ na množině $M = \{(x, y) \in R^2 \mid y^2 - x^3 = 0\}$

(c) $f(x, y) = y$ na množině $M = \{(x, y) \in R^2 \mid x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$

(d) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11$
na množině $M = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 - 4x \leq 5\}$

Domácí úkol. (20.5.2019)

1. Buď dána funkce $f(x, y) = \log(x + y^2)$.
(a) Najděte definiční obor D funkce f a načrtněte jej.
(b) Vypočítejte gradient funkce $\nabla f(x, y)$ v bodě $[0, 1]$.
(c) Je funkce f v bodě $[1, 1]$ diferencovatelná? Pokud ano, napište její totální diferenciál v tomto bodě.
(d) Aproximujte hodnotu funkce f v bodě $[0,04; 0,99]$ pomocí totálního diferenciálu $D_{f(0,1)}$.
(e) Napište rovnici tečné roviny ke grafu f v bodě $[0, 1, 0]$.

2. (a) Ukažte, že zadanou množinu $M = \{(x, y, z) \in R^3; \ x \sin z + y \cos z - e^z = 0\}$ lze na okolí daného bodu $a = (2, 1, 0)$ popsat jako graf funkce $f = f(x, y)$, kde $f(2, 1) = 0$.
(b) Spočtěte její (parc.) derivace prvního řádu v příslušném bodu a.

(c) Napište rovnici její tečny v b. $(2, 1, 0)$.

3. Zjistěte pomocí Lagrangeových multiplikátorů lokální extrémy funkce $f(x, y) = \sqrt{3}x - y + 2$ na množině $M = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + 2x + y^2 = 0\}$.