12. cvičení z MA II. (9.5.2019)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Tečná nadrovina. Nechť $G \subset R^n$ otevřená, $a \in G$, $f \in C^1(G)$. *Tečnou nadrovinou ke grafu funkce f v bodě* $[a, f(a)]$ rozumíme graf fce T, $x \in R^n$:

$$T : x \mapsto f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n)$$

1. V bodě P plochy $z = g(x, y)$, najděte normálu $\vec{N}_P$ a obecnou rovnici tečné roviny, jestliže:

(a) $g(x, y) = x^3 + 2y^2 - 18$, $P = (3, -1, ?)$

(b) $g(x, y) = \ln \frac{x-1}{y} + 2x^2 - y$, $P = (2, 1, ?)$

(c) $g(x, y) = 3x^2 - 2xy^2 - 7y + 3$, $P = (2, -3, ?)$

2. Najděte bod P na ploše $z = f(x, y)$, v němž je normála rovnoběžná s osou z, jestliže:

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

(b) $f(x, y) = 2x + 3y + 4$

(c) $f(x, y) = 2x^2 - 2xy + 4x + 6y - 25$

3. Nechť $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y - 4$.
Určete tečnu T, která je kolmá k přímce $\{[t, t, t] \in R^3; t \in R\}$. Ve kterém bodě protíná T přímku $\{(0, 0, t) \in R^3; t \in R\}$?

4. Anuloid $A = (x^2 + y^2 + z^2 + 12)^2 - 64(x^2 + y^2) = 0$ popište jako sjednocení grafů dvou fcí dvou proměnných. Existuje k tomuto anuloidu tečná rovina v bodě $[0, 3, \sqrt{3}]$?

Další příklady k procvičování:

5. Buď dána funkce

$$f : (x, y) = \log(\sqrt{y+1} - x)$$

a) Najděte definiční obor D funkce f a načrtněte jej.
b) Vypočítejte gradient $\nabla f(x, y)$ v bodě $[0, 0]$.
   Pokud má f v tomto bodě totální diferenciál, určete ho.
c) Určete rovnici tečné roviny v bodě $[0, 0]$.
d) Vypočítejte přibližně pomocí lineární aproximace $f(-0,04; 0,02)$.

6. Určete globální extrémy zadané funkce f na množině M:
$f(x, y) = xy + 2x + 3y$ na $M = \{[x, y] \in R^2;\ 4x^2 + 9y^2 < 36\ \&\ y \leq -\frac{x}{2}\}$

7. Určete globální extrémy zadané funkce f na množině M:
$f(x, y) = (x + y) \cdot e^{-(x^2+y^2)}$ na $M = \{[x, y] \in R^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\ \&\ |x| \leq y + 1\}$