5. Cvičení z MA I. (30. 10. 2018)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

1. Rozcvička – spočítejte následující limitu: $\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\sqrt{n}}$

2. 'Škála limit' – určete, čemu se rovnají následující limity (pro $q \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$):
2A. geometrická posloupnost, součin s polynomem:

(a) $\lim_{n\to\infty} q^n$ (b) $\lim_{n\to\infty} n \cdot q^n$ (c) $\lim_{n\to\infty} n^k \cdot q^n$

2B. n-tá odmocnina:

(d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a},\ a \in \mathbb{R},\ a \geq 0$ (znáte) (e) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ (f) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$

2C. mocniny a faktoriál:

(g) $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!}$ (h) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$ (i) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n!}$

3. Další příklady na procvičení – spočítejte následující limity (nebo dokažte, že neexistují):

(a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4+(-1)^n}{-7}\right)^n$ (b) $\lim_{n\to\infty}(n + \cos(n^2))$ (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+(-2)^n}{3^n}$

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n+2}{2^n(3-(-1)^n)}$ (e) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2-n}-2n)$ (f) $\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{2n+5}\ -\ 3\sqrt[3]{2n}}{\sqrt{n^3+2}\ +\sqrt[3]{n^4}}$

(g) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-3})$ (h) $\lim_{n\to\infty}(n - 5 \cdot \lfloor\frac{n}{5}\rfloor)$ (i) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n-5\cdot\lfloor\frac{n}{5}\rfloor)}{n}$

4. Další příklady na počítání – určete následující limity (nebo dokažte, že neexistují):

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+n^5}{n^6+n!}$ (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}\cdot(2^n-n)}{(n^2-n+1)(n!+\ln n)}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{2}{3}}\sin n!}{n+1}$ (d) $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+2n^n+n!}{(n+1)^4+\sin n+(3n)!}$

(e) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ (f) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+4n+n\sin n}{n\cos 3n+(2n+\sin n)^2}$ (g) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k}{\sqrt[3]{8n^6-n}}$

(h) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n}\lfloor xk\rfloor}{n^2}$ (parametr $x \in R$, $\lfloor x\rfloor$ ... celá část x)

Domácí úkol (na 6. 11. 2018):

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^3}{n^4}$ (viz též cvičení 2; 1 bod)

2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ (1 bod)

Řešení:

1a. -3 1b. $\frac{1}{10}$ 1c. 0 1d. 0 1e. 1 1f. $\frac{1}{2}$

3a. 0 3b. $+\infty$ 3c. 0 3d. 0 3e. $-\frac{1}{4}$ 3f. $\sqrt{2}$ 3g. $\frac{1}{2}$ 3h. neex. 3i. 0

4a. 0 4b. 0 4c. 0 4d. 0 4e. 1 4f. $\frac{1}{2}$ 4g. $\frac{1}{4}$ 4h. $\frac{x}{2}$