6. Cvičení z MA I. (13.11.2018)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

1. Spočítejte následující limity:

(a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2})$

(b) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{\sqrt{n^7} + \sqrt[3]{n^7}} - \sqrt[3]{\sqrt{n^7} - \sqrt[3]{n^7}} \right)$

(c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^+$

2. Určete limity v závislosti na parametrech $k, l \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $|a| < 1, |b| < 1$:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k-(n-1)^l}{n^k+n^l}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k+n^{k-l}+...+n+1}{n^l+n^{l-l}+...+n+1}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n+a^{n-l}+...+a+1}{b^n+b^{n-l}+...+b+1}$

3. Dokažte, zda následující rekurentně zadaná posloupnost $\{a_n\}$ má limitu, případně ji spočítejte:

(a) $a_1 = \sqrt{c} \quad (c > 0,\ c \in \mathbb{R}), \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + c}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$

(b) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$

4. Zjistěte, pro která reálná čísla x je následující posloupnost monotonní:

$$\left\{ \left(\frac{x^3}{3x-2} \right)^n \right\}$$

Dú na 20.11.2018:

1. Spočítejte: $\lim_{n\to\infty} \frac{n+\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor^3}{n-\lfloor \sqrt{n+9} \rfloor}$

2. Dokažte, že následující rekurentně zadaná posloupnost $\{a_n\}$ má limitu; tuto limitu spočítejte:
$a_1 = t \quad (t > 0$ je parametr$), \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$ pro každé $n \in \mathbb{N}$

Naučit se definice a věty týkající se číselných řad!

Řešení:
1a. 0   1b. 0   1c. $\frac{2}{3}$ 1d. $\max a, b, c$
2a. 1 pro $k > l$, -1 pro $k < l$, 0 pro $k = l$
4. konst. pro $x \in \{-2, 0, 1\}$, rost. pro $x \in (-\infty; -2) \cup (\frac{2}{3}; 1) \cup (1; +\infty)$, kles. pro pro $x \in (-2; 0)$