

12. Cvičení z MA I. (8.1.2019)

Určete průběhy následujících funkcí.

Postup:

1. definiční obor Df
2. průsečíky s osami
3. spojitost; sudost/lichost; periodicitu
4. limitní chování v krajních bodech a v “podezřelých” bodech Df
5. asymptoty v $\pm\infty$
($p(x) = ax + b$, kde $a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ a $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax)$)
6. první derivace v Df; jednostranné derivace v krajních bodech
7. podezřelé body – diskuse (lok. a glob. max/min); monotonie
8. konvexita/konkávita – **úvahou** nebo druhá derivace
($f'' > 0$ konvex. \cup ; $f'' < 0$ konkáv. \cap)
9. graf funkce

1. Ukázkové příklady:

- (a) $\sqrt[3]{(x^4 - 1)^2}$ (b) $|x| \cdot \exp(-|x - 1|)$
- (c) $|x - 2| - 2 \cdot \operatorname{arctg} x$ (d) $f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{\sin^2 x}) & x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \\ 0 & x = k\pi; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Další příklady na průběh funkcí.

2. polynomy:

- (a) $f_1(x) = x^2 - x^4$ (b) $f_2(x) = -x^3 - 2x^2 + x + 2$

3. racionální (lomené) funkce:

- (a) $f_1(x) = \frac{1}{1-x^2}$ (b) $f_2(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$
- (c) $f_3(x) = \begin{cases} \frac{|1+2x|}{\sqrt{1-2x+x^2}} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$

4. gonio/cyklometrické funkce:

- (a) $f_1(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$ (b) $f_2(x) = \arccos \left| \frac{1-x}{1-2x} \right|$
- (c) $f_3(x) = \arcsin \left(\frac{2x}{1+x^2} \right) - 2 \operatorname{arctg} x$

5. exponenciála:

(a) $f(x) = e^{\lfloor x \rfloor}$ kde $\lfloor x \rfloor$ je celá část x

(b) $f_1(x) = e^x - x$ (c) $f_2(x) = x^x$

(d) $f_3(x) = x^{1/x}$ (e) $f_4(x) = |x - 1| \cdot \exp\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)$

(f) $f_5(x) = (x + 2) \cdot \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ (g) $f_n(x) = e^x(x + 1)^n$, $n \in \mathbb{N}$

6. A ještě nějaké limity (l'Hospitalovo pravidlo):

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(-\frac{1}{x^2})}{x}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg}^2 x)^{\sin^2 x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$ (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$ (f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right)$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x} \ln \sqrt{x}$ (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3x} - \frac{1}{\sin x}\right)$ (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Dú – doplňující příklady.

Určete průběhy funkcí.

(1) $x\sqrt{2-x^2}$ (2) $\sin^3 x + \cos^3 x$ (3) $\arccos\left(\frac{-x^2-x+2}{4}\right)$

(4) $\left|\frac{x}{1+x^2}\right|$ (5) $2\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$