3. Cvičení z MA I. (16.10.2018)

Markéta Lopatková

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

A. Číselné obory – rozhodněte a dokažte:

1. Existuje zobrazení z přirozených čísel do celých čísel $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, které je 'na'?
Existuje také bijekce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$?

2. Existuje zobrazení z přirozených čísel do racionálních čísel $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, které je 'na'?

B. Co je to uspořádání, supremum, infimum, maximum, minimum? Příklad množiny, která má supremum, ale ne maximum; příklad množiny bez suprema.

1. Najděte suprema a infima následujících množin nad reálnými čísly (pokud existují); existují pro ně maxima a minima?

(a) $A_1 = \{-\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$ (b) $A_2 = \{\frac{n+(-1)^n}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$

(c) $A_3 = \{n^{(-1)^n};\ n \in \mathbb{N}\}$ (d) $A_4 = \{q < \sqrt{3};\ q \in \mathbb{Q}\}$

(e) $A_5 = \{\frac{p}{p+q};\ p, q \in \mathbb{N}\}$ (f) $A_6 = \{n^2 - m^2;\ m, n \in \mathbb{N}\ \&\ n > m\}$

2. Mějme množinu X a množinu čísel opačných, tedy $-X = \{-x \mid x \in X\}$. Dokažte, že platí: $\inf\{-x\} = -\sup\{x\}$

3. Nechť $X = \{x \in \mathbb{Q}\ | x^2 < 100/49\}$. V tělese $(\mathbb{Q}, \leq$ (rac. čísla s obvyklým uspořádáním zlomků) najděte $\inf X$ a $\sup X$.
Jak se výsledky změní, když $\mathbb{Q}$ nahradíme $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ nebo $\mathbb{R}$?

C. Co to je uspořádané těleso (dále R) a úplné uspořádané tšleso?

1. Z axiomů pro uspořádané těleso $(R, +, \cdot, <)$ dokažte, že pro $\forall x \in R$, $\forall y \in R$ platí (0 je nulový provek tohoto tělesa, 1 jeho jednotkový prvek):
(a) $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ (b) $-x = (-1) \cdot x$ (c) $(x \cdot y = 0) \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$

2. Příklad konečného tělesa.

Domácí úkol (23.10.2018)

1. Mějme množinu přirozených čísel $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$ a relaci dělitelnosti ($aRb \Leftrightarrow a|b$). Jde o uspořádání (ostré, neostré, částečné, lineární (=úplné))? (1 bod)

2. Z axiomů pro pro uspořádané těleso $(R, +, \cdot, <)$ (tj. z definičních vlastností úplného uspořádaného tělesa, kde 0 je jeho nulový provek) dokažte, že pro $\forall x \in R,\ \forall y \in R,\ \forall n \in \mathbb{N}$ platí: $(0 \leq x < y) \Rightarrow x^n < y^n$ (1 bod)