

## 1. Cvičení z MA II. (21.2.2018)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

### Taylorův polynom

Co je Taylorův polynom funkce  $f$  v zadaném bodě  $a$  (značení  $T_n^{f,a}$ )?  
Jak je tento polynom charakterizován (pro  $x \rightarrow a$ )?

1. Najděte Taylorův polynom (řádu např. 5 v bodě  $a$ ) pro následující funkce:

- |   |                      |
|---|----------------------|
| (a) $f(x) = \operatorname{tg} x, a = 0$ | (b) $f(x) = e^x$     |
| (c) $f(x) = \log(1+x)$                  | (d) $f(x) = \sin x$  |
| (e) $f(x) = \cos x$                     | (f) $f(x) = (1+x)^2$ |

2. Najděte Taylorův polynom řádu  $N$  v bodě 0 pro následujících funkce. Konverguje tento polynom k zadané funkci (tj. pro  $N \rightarrow \infty$ )?

- |  |                                |
|--|--------------------------------|
| (a) $f(x) = e^{-x^2}$                                    | (b) $f(x) = xe^{2x}$           |
| (c) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pro $x \neq 0, f(0) = 0$ | (d) $f(x) = \frac{x}{9+x^2}$   |
| (e) $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$                        | (f) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ |

3. Pomocí Taylorova polynomu spočítejte následující limity:

- |  |
|--|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$             |
| (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$                     |
| (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5})$ . |

4. Spočítejte přibližně (můžete bez odhadu chyby) následující čísla:  $\cos 0.1, \sqrt{0.98}, \sqrt[3]{1279.03}, e^{0.01}, \log 1.2, \sqrt[12]{1.03}, 1.01^5, \dots$

**Domácí úkol na 27.2.2018:**

Zopakujte si odhady chyb u aproximace pomocí Taylorova polynomu.

1. Pomocí Taylorova polynomu spočtěte následující limitu:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right)$$

2. Odhadněte hodnotu  $\sin 0,1$ . Pro která  $x$  můžeme odhadnout  $\sin x$  jako  $x - \frac{x^3}{3!}$  s přesností na tři desetinná místa?

**Řešení:**

**1.**  $T_5^{\text{tg},0}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$

**2a.**  $\sum_{n=0}^{N/2} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^N \frac{-x^{2n}}{n!}$

**2b.**  $\sum_{n=0}^{N-1} \frac{2^n x^{n+1}}{n!}$ , pro  $x \in \mathbb{R}$

**2c.**  $\sum_{n=0}^N 0 \cdot x^n = 0$  nekonverguje k  $f(x)$ ,  $x \neq 0$

**2d.**  $\sum_{n=0}^{(N-1)/2} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$ , na  $(-3, 3)$

**2e.**  $2 \cdot \sum_{n=0}^{(N-1)/2} \frac{x^{2n+1}}{2^{n+1}}$  pro  $|x| < 1$

**2f.**  $\sum_{n=0}^N (n+1)x^n$ , na  $(-1, 1)$

**3a.**  $-\frac{1}{12}$  **4.** 0.099 833, 0.995 004, 0.989 949, 12.002 3, 1.010 050, 0.182 321, 0.693 147, 1.002 466, 1.051 010