

9. Cvičení z MA II. (18.4.2018)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Parciální derivace. Necht $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, G je otevřená, $a \in G$ a $e^i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$ je i -tý vektor kanonické báze \mathbb{R}^n . *Parciální derivací fce f podle i -té proměnné v bodě a* rozumíme číslo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te^i) - f(a)}{t}$$

(pokud tato limita existuje).

Značení: $C^1(G)$...množina fcí, které mají pro každý bod $a \in G$ spojité parc. derivace podle všech proměnných (tj. fce $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ jsou spojité jako fce n proměnných).

1. Určete definiční obor následujících funkcí na \mathbb{R}^n , vyšetřete jejich spojitost a vypočtěte parciální derivace všude, kde existují:

- (a) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$
- (b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2} + 1$
- (c) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$ pro $[x, y] \neq 0$, $f(0, 0) = 0$

2. Určete definiční obor následujících funkcí a vypočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu všude, kde existují. V zadaném bodě vyčíslete.

- (a) $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$, v bodě $[e, 1, 2]$
- (b) BONUS: $F(x, y) = g(xy, \frac{x}{y})$ v bodě $A = (3, 2)$.

3. Druhé parciální derivace se mohou lišit v závislosti na pořadí derivací:

$$f(x, y) = xy \text{ pro } |x| \geq |y| \text{ a } f(x, y) = 0 \text{ pro } |x| < |y|$$

4. Co to je **směrová derivace**?

Vypočtěte derivace následujících funkcí f v zadaných směrech h v zadaných bodech a .

- (a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ ve směru $h = (-1, 1, 1)$ v bodě $a = (1, 2, -1)$
- (b) $f(x, y) = \arctg xy$ ve směru $h = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ v bodě $a = (1, 1)$
- (c) $f(x, y) = e^{x-y^2}$ ve směrech $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, 1)$ v bodě $(0, 0)$

Domácí úkol na 24.4.2018:

1. Určete definiční obor následující funkce, vyšetřete jejich spojitost a vypočtete parciální derivace všude, kde existují
$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ pro } [x, y] \neq 0, f(0, 0) = 0$$
2. Určete definiční obor následující funkce a vypočtete parciální derivace 1. a 2. řádu všude, kde existují:
$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{x+y}$$
3. Vypočtete derivaci funkce $f(x, y, z) = \sin(xyz)$ ve směru $(2, 1, 1)$ v bodě $(1, 1, 0)$

Řešení:

1a. spojitá na R^2

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{y \cdot \operatorname{sgn}(xy)}{\sqrt{|xy|}} \text{ pro } x \neq 0, y \neq 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{x \cdot \operatorname{sgn}(xy)}{\sqrt{|xy|}} \cdot \text{ pro } x \neq 0, y \neq 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) \text{ neex. pro } y \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = 0 \text{ pro } y \neq 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 0 \text{ pro } x \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) \text{ neex. pro } x \neq 0$$

1b. spojitá na R^2

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2+4y^2}} \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0],$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{8y}{\sqrt{x^2+4y^2}} \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0],$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \text{ neex.}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \text{ neex.}$$

1c. spojitá na R^2

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0],$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0],$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

2a.