

8. Cvičení z MA I. (29.11.2017)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Co jsou to (číselné) řady a jak se definuje jejich součet? Kdy řada konverguje? Nutná a postačující podmínka konvergence. Jaká znáte kritéria pro konvergenci řad?

1. Rozhodněte, zda následující řady konvergují, konvergují absolutně, případně divergují

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} \quad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n-\ln n} \\ \text{(c)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \quad \text{(d)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n-1} \right)^n \end{array}$$

2. Rozhodněte, zda následující řady konvergují, konvergují absolutně, případně divergují v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^x} \quad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)} \\ \text{(c)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{(d)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^4 x^n \end{array}$$

Dů (na 5.12.2017):

Zjistěte, zda následující řady konvergují, konvergují absolutně, případně divergují :

$$\begin{array}{l} 1. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{n^2+2}{n^3+n} \\ 2. \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} \\ 3. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin n \end{array}$$

Řešení:

1a. KN (Leibnitz), AŘ D (srovnáním s $1/\sqrt{n}$)

1b. KN (Leibnitz), D (srovnáním s $1/n$)

1c. D (srovnáním s $1/n$)

1d. KA (Cauchy)

2a. KA pro $x > 1/2$, jinak D (srovnáním s $1/n^{x+1/2}$)

2b. KA pro všechna x (srovnáním s $1/n(n+1)$)

2c. KA pro $|x| < 1$, D pro $|x| > 1$, KN pro $|x| = 1$

2d. KA pro $|x| < 1$, D pro $|x| \geq 1$