

8. Cvičení z MA II. (12.4.2017)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Spojítost. Jak se definuje spojitá funkce (různé definice)?

1. Ukažte, že polynomy více proměnných jsou spojitě funkce $P : R^n \rightarrow R$.

2. Jsou následující fce spojitě? Nabývají na R^2 své největší a nejmenší hodnoty? Jaké?

(a) $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ pro $[x, y] \neq [0, 0]$, $f(0, 0) = 0$

(b) $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ pro $[x, y] \neq [0, 0]$, $f(0, 0) = 0$

(c) $f(x, y) = (x + y)^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

(d) $f(x, y) = \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(e) $f(x, y) = \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$

Parciální derivace. Necht $f : G \subset R^n \rightarrow R$, G je otevřená, $a \in G$ a $e^i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$ je i -tý vektor kanonické báze R^n . *Parciální derivací fce f podle i -té proměnné v bodě a* rozumíme číslo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te^i) - f(a)}{t}$$

(pokud tato limita existuje).

Značení: $C^1(G)$... množina fcí, které mají pro každý bod $a \in G$ spojitě parciální derivace podle všech proměnných (tj. fce $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ jsou spojitě jako fce n proměnných).

1. Určete definiční obor následujících funkcí na R^n , vyšetřete jejich spojitost a vypočítejte parciální derivace všude, kde existují:

(a) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$

(b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2} + 1$

(c) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ pro $[x, y] \neq 0$, $f(0, 0) = 0$

2. Určete definiční obor následujících funkcí a vypočítejte parciální derivace 1. a 2. řádu všude, kde existují. V zadaném bodě vyčíslíte.

(a) $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$, v bodě $[e, 1, 2]$

(b) BONUS: $F(x, y) = g(xy, \frac{x}{y})$ v bodě $A = (3, 2)$.

3. Druhé parciální derivace se mohou lišit v závislosti na pořadí derivací:

$$f(x, y) = xy \text{ pro } |x| \geq |y| \text{ a } f(x, y) = 0 \text{ pro } |x| < |y|$$

Domácí úkol na 18.4.2017:

1. Vyšetřete spojitost funkce $f(x, y) = \frac{\sin x + \sin y}{x + y}$.
Lze spojitě dodefinovat na R^2 ?
2. Určete definiční obor následující funkce, vyšetřete jejich spojitost a vypočtete parciální derivace všude, kde existují
 $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ pro $[x, y] \neq 0$, $f(0, 0) = 0$
3. Určete definiční obor následující funkce a vypočtete parciální derivace prvního a druhého řádu všude, kde existují.
 $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{x+y}$

Řešení:

2a. není spojitá v b. $[0, 0]$, omezená

2b. spojitá, není omezená

2c. spojitá pro $f([0, 0]) := 0$

2d. spojitá pro $f([0, 0]) := 0$

2e. nelze spojitě dodefinovat v b. $[0, 0]$

1a. spojitá na R^2

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{y \cdot \text{sgn}(xy)}{\sqrt{|xy|}} \text{ pro } x \neq 0, y \neq 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{x \cdot \text{sgn}(xy)}{\sqrt{|xy|}} \text{ pro } x \neq 0, y \neq 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) \text{ neex. pro } y \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = 0 \text{ pro } y \neq 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 0 \text{ pro } x \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) \text{ neex. pro } x \neq 0$$

1b. spojitá na R^2

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4y^2}} \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0],$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{8y}{\sqrt{x^2 + 4y^2}} \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0],$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \text{ neex.}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \text{ neex.}$$

1c. spojitá na R^2

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0],$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0],$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

$$\mathbf{2a.} \quad T(x, y, z) = e^2 + 2e(x - e) - 2e^2(y - 1) + e^2(z - 2), \quad D_f : x \cdot y > 0$$

Dů 1. spojitá pro $f([a, -a]) := \cos a \quad \forall a \in R$

Dů 2. spojitá na R^2

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0],$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0],$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$