

#### 4. Cvičení z MA II. (15.3.17)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

1. Spočítejte primitivní funkce:

- (a)  $\int x^n \ln x \, dx$       (b)  $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, dx$       (c)  $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} \, dx$   
(d)  $\int \sin x \cdot \sqrt{2 + \cos x} \, dx$       (e)  $\int \frac{e^{5x}-1}{e^{2x}} \, dx$       (f)  $\int x \cdot \sqrt{x^2 + 1} \, dx$   
(g)  $\int x \cdot \sqrt{2 - 3x^2} \, dx$       (h)  $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} \, dx$       (i)  $\int \frac{1}{x^2-1} \, dx$   
(j)  $\int \frac{5x}{2x+3} \, dx$       (k)  $\int \sin x \cos 2x \, dx$       (l)  $\int \sin x \sin 2x \, dx$   
(n)  $\int \frac{1}{x+2\sqrt{x+2}} \, dx$       (o)  $\int \frac{x-1}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})} \, dx$

3. Důležité příklady:

- (a)  $\int \frac{1}{\sin x} \, dx$       (na  $(0, \pi)$ , např. užíjte substituci  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ )  
(b)  $\int \frac{1}{1+3\sin^2 x} \, dx$       (na  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , užíjte např. substituci  $\operatorname{tg} x = t$ )

4. A další příklady na určování primitivní funkce:

- (a)  $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x} \, dx$       (b)  $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} \, dx$   
(c)  $\int \frac{1}{e^{2x}+e^x-2} \, dx$       (d)  $\int \cos^2 x \, dx$       (e)  $\int \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg} x} \, dx$   
(f)  $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$       (g)  $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2} \, dx$

**Domácí úkol na 21.3.2017:**

- (1)  $\int \frac{x^{17}-5}{x-1} \, dx$   
(2)  $\int \log(x + \sqrt{1+x^2}) \, dx$   
(3)  $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x(1-\cos x)} \, dx$

Zopakovat/naučit se/pochopit, jak fungují standardní substituce  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ,  $t = \operatorname{tg} x$ .

**Řešení:** (až na  $c$ )

**1n.**  $\log(x + \sqrt{x} + 2) - 2\operatorname{arctg}(\sqrt{x} + 1)$  na  $(0, +\infty)$

**1o.**  $3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\log\sqrt[6]{x} + 6\frac{1}{\sqrt[6]{x}} - 3\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2\frac{1}{\sqrt{x}}$  na  $R$

**3a.**  $\log \operatorname{tg} \frac{x}{2} \equiv \frac{1}{2} \log \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ , na  $(0, \pi)$

**3b.**  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2 \cdot \operatorname{tg} x)$ , na  $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$

**4a.**  $\frac{-10 \cdot 5^{-x} \log 2 + 2^{-x} \log 5}{5 \log 5 \log 2}$ , na  $R$

**4b.**  $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x$ , na  $R$

**4c.**  $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \log |e^x - 1| + \frac{1}{6} \log(e^x + 2)$ , na  $(-\infty, 0)$  a na  $(0, \infty)$

**4d.**  $\frac{1}{2}(\sin x \cos x + x)$ , na  $R$

**4e.**  $\ln |1 + \operatorname{tg} x|$  na  $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi)$  a na  $(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$

**4f.**  $\frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{1}{3} \cos^3 x$ , na  $R$     **4g.**  $\frac{1}{\cos x - 1}$ , na  $(2k\pi, 2(k+1)\pi), k \in Z$

**Dú1.**  $\sum_1^{17} \frac{x^k}{k} - 4 \log |x - 1|$ , na  $(-\infty, 1)$  a na  $(1, \infty)$

**Dú2.**  $x \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1}$ , na  $R$

**Dú3.**  $-\frac{1}{4} \log(1 + \cos x) - \frac{3}{4} \log(1 - \cos x) + \frac{1}{2(\cos x - 1)}$  na  $(k\pi, (k+1)\pi)$   
 $= -\frac{3}{2} \log |t| - \frac{1}{4t^2} + \log |1 + t^2|$ , kde  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$