9. cvičení z MA II. (19.4.2017)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Co to je **směrová derivace**? Jak souvisí totální diferenciál s derivacemi ve směru?

Co to je **(totální) diferenciál** funkce $f : G \to R$ ($G \subset R^n$ otevřená) v bodě $a \in G$ (značíme $Df(a)$)?
Jak souvisí totální diferenciál s parciálními derivacemi?
Jak souvisí totální diferenciál s gradientem?

1. Vypočtěte derivace následujících funkcí f v zadaných směrech h v zadaných bodech a. (Jak byste postupovali, pokud byste chtěli využít pouze definice směrové derivace?)

(b) $f(x,y) = \operatorname{arctg} xy$ ve směru $h = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ v bodě $a = (1,1)$

(c) $f(x,y) = e^{x-y^2}$ ve směrech $(1,0),\ (-1,0),\ (1,1)$ v bodě $(0,0)$

(d) $f(x,y,z) = \sin(xyz)$ ve směru $(2,1,1)$ v bodě $(1,1,0)$

(e) Určete směrové derivace funkce $f(x,y,z) = \sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}$ v bodě $(0,0,0)$. Rozhodněte, zda v tomto bodě existuje diferenciál.

2. Ověřte podle definice, že lineární funkce $L(h_1,h_2) = 2(h_1+h_2)$ je diferenciálem funkce $f(x,y) = x^2+y^2$ v bodě $(1,1)$.

3. Vyšetřete, zda lze funkci $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}\log(1+xy)$ dodefinovat v nějakém okolí počátku tak, aby v něm měla diferenciál.

4. Vypočtěte totální diferenciál funkce $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$ v bodě $a = (1,2,-1)$; jaká bude jeho hodnota ve směru $h = (-1,1,1)$?

5. Vypočtěte totální diferenciál následujících funkcí f:

(a) $f(x,y) = e^{xy}$ (b) $f(x,y,z) = xy+yz+xz$

6. Ukažte, že pro malá x a y platí:

(a) $(1+x)^m(1+y)^n \approx 1+mx+ny$
(b) $\ln(1+x)\ln(1+y) \approx xy$

Domácí úkol na 25.4.2017

1. Buď dána funkce

$$f(x, y) = \arccos \frac{x}{x + y}$$

a) Najděte definiční obor D funkce f a načrtněte jej.
b) Určete gradient funkce $\nabla f(x, y)$ v bodě $[1, 1]$.
c) Je funkce f v tomto bodě diferencovatelná? Pokud ano, napište její totální diferenciál v tomto bodě.
d) Aproximujte f pomocí diferenciálu v bodě [1,04; 0,99].

2. Zjistěte, zda lze následující funkci $f(x, y)$ dodefinovat tak, aby měla ve všech bodech R^2 totální diferenciál:

$f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}$

3. Vypočtěte totální diferenciál funkce $f(x, y) = \frac{x}{y}$.