5. Cvičení z MA II. (22.3.2017)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Určete primitivní funkce k následujícím funkcím:

Rozcvička:

(a) $\int \frac{\log x}{x(1+\log x)}\,\mathrm{d}x$ (b) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

(c) $\int \arccos x\,\mathrm{d}x$ (d) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$

1. Najděte primitivní funkci - Eulerova substituce

$\int \frac{1}{x+(\sqrt{x^2+x+1})}\,\mathrm{d}x$ (Nápověda: zkuste substituci $\sqrt{x^2+x+1} = x+t$)

2. Zvolte vhodnou substituci a spočítejte (na intervalech, které jsou 'přirozeným' definičním oborem výsledných primitivních funkcí):

(a) $\int \frac{1}{1+\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x$ (b) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ (c) $\int \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}\,\mathrm{d}x$

(d) $\int \frac{1}{2\sin x-\cos x+5}\,\mathrm{d}x$ (e) $\int \frac{1}{5+4\sin x}\,\mathrm{d}x$ (f) $\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x$

(g) $\int \frac{1}{\sin x\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$ (h) $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,\mathrm{d}x$

3. Nepříjemné substituce:

(a) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x$ (b) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$ (c) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$

(d) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x$ (f) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x$ (g) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+5x+1}}\,\mathrm{d}x$

4. Příklady písemkového typu (doc. Kalenda):

(a) $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x+cosx+2}\,\mathrm{d}x$ (c) $\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x^2-1)(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x$

(d) $\int \frac{(\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x)^2}{\sin^2 x-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ (e) $\int \frac{\sin x}{9\cos^2 x+2\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$

Domácí úkol na 28.3.2017:

(1) $\int \frac{1}{\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 x}\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int \frac{8+6x-2x^2}{x^4-4x+3}\,\mathrm{d}x$

Řešení: (až na c)
Rozcvička:
a. $\log x - \log|1+\log x|$, na $(0,\frac{1}{e})$ a na $(\frac{1}{e},\infty)$ **b.** $(x+1)$ arctg $\sqrt{x}-\sqrt{x}$, na $(0,\infty)$
c. $x\cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2}$, na $(-1,1)$ **d.** $-2\sqrt{1-x}\cdot \arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}$, na $(0,1)$

2b. $\sqrt{x^2+x+1} - x + 2\log|\sqrt{x^2+x+1}-x-2| - \frac{1}{2}\log|2\sqrt{x^2+x+1}-2x-1|$, na $(-\infty,-1)$ a na $(-1,\infty)$ **2a.** $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\log|\sin x+\cos x|$, na $D_f(x\neq -\frac{\pi}{4}+2k\pi, x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z)$ **2b.** $x-\frac{1}{\sqrt{2}}$ arctg $(\sqrt{2}$ tg $x)$, platí na D_f mimo body $\frac{\pi}{2}+k\pi$, posun vždy o $-\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ **2c.** $\frac{-1}{1+\text{ tg } x}$, na D_f mimo $\frac{\pi}{2}+k\pi$, lze spoj. dodef. 0 **2d.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$ arctg $(\frac{1}{\sqrt{5}}(3$ tg $\frac{x}{2}+1))$, mimo $\pi+2k\pi, k\in Z$, posun vždy o $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$ **2e.** $\frac{2}{3}$ arctg $(\frac{1}{3}(5$ tg $\frac{x}{2}+4))$, mimo $(2k+1)\pi, k\in Z$, posun vždy o $\frac{2\pi}{3}$ **2f.** $\frac{1}{6}\log((1-\cos x)(2+\cos x)^2/(1+\cos x)^3)$, mimo $k\pi, k\in Z$ $(\equiv \frac{1}{3}\log(|t|(t^2+3))$, kde $t=$ tg $\frac{x}{2})$ **2g.** $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{3}\frac{1}{\cos^3 x}+\frac{1}{2}\log\sqrt{\frac{\cos x-1}{\cos x+1}}$ $(\equiv \frac{1}{\cos x}+\frac{1}{3}\frac{1}{\cos^3 x}+\log|\text{tg } \frac{x}{2}|)$, mimo $\frac{k\pi}{2}, k\in Z$ **2h.** $\log(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1})$, na R

3a. $\log|\frac{1+t}{1-t}| - 2$ arctg t, kde $t=\sqrt{\frac{x-1}{1+1}}$ **3b.** $\log|x+\sqrt{x^2+1}|$ = argsinh x na R **3c.** $\log|x+\sqrt{x^2-1}|$ na int. $(-\infty,-1)$ na $(1,\infty)$ **3d.** $\log|t| + \frac{3}{1+2t} - \frac{3}{2}\log|1+2t|$ na R **3e.** vede na $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x$ **3f.** $\log|\frac{t-1}{t+1}|$, kde $\sqrt{x^2+5x+1}=x+t$, tedy $\log\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-2}$

4a. $\log\frac{t^2+2t+3}{t^2+1}+\frac{1}{\sqrt{2}}$ artcg $\frac{t+1}{\sqrt{2}}-\frac{1+t}{t^2+1}+k\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ na int. $((2k-1)\pi,(2k+1)\pi)$, kde $t=$tg $\frac{x}{2}$; lze "slepit" v krajních bodech (např. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ pro $x=\pi$) **4c.** $-\frac{1}{6}\log|x-1|-\frac{1}{3(x-1)}+\frac{1}{2}\log|x+1|-\frac{1}{6}\log(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}$ arctg $\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ na $(-\infty,-1)$ a na $(-1,1)$ a na $(1,\infty)$ **4d.** tg x+cotg $x+2\log|\text{tg } x-1|-2\log|\text{tg } x+1|$ na int. $(\frac{k\pi}{4},\frac{(k+1)\pi}{4})$ **4e.** $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ arctg $(\sqrt{2}\cos x)+\frac{1}{3\sqrt{2}}$arctg $\frac{\cos x}{\sqrt{2}}$ na R

Dú1. $-\frac{1}{2}($ cotg $x+\frac{1}{\sqrt{2}}$ arctg $(\frac{1}{\sqrt{2}}$ tg $x))$, mimo $\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$ (posuny o $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$)
Dú2. $\arcsin(\frac{2}{3}(x-\frac{1}{2}))$, nebo 2arctg$\sqrt{\frac{x+1}{2-x}}$