3. Cvičení z MA I. (20.10.2015)

Markéta Lopatková

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

A. Co to je těleso reálných čísel?

1. Dokažte, že pro $\forall x \in R,\ \forall y \in R,\ \forall n \in N$ platí (z axiomů pro reálná čísla):

(a) $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ (b) $-x = (-1) \cdot x$

(c) $(x \cdot y = 0) \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$ (d) $(0 \leq x < y) \Rightarrow x^n < y^n$

2. Příklad konečného tělesa.

3. Příklad uspořádání podle dělitelnosti.

B. Co je to supremum, infimum, maximum, minimum? Příklad množiny, která má supremum, ale ne maximum; příklad množiny bez suprema.

1. Najděte suprema a infima následujících množin v R (pokud existují); existují pro ně maxima a minima?

(a) $A_1 = \{-\frac{1}{n};\ n \in N\}$ (b) $A_2 = \{\frac{n+(-1)^n}{n};\ n \in N\}$

(c) $A_3 = \{n^{(-1)^n};\ n \in N\}$ (d) $A_4 = \{q < \sqrt{3};\ q \in Q\}$

(e) $A_5 = \{\frac{p}{p+q};\ p, q \in N\}$ (f) $A_6 = \{n^2 - m^2;\ m, n \in N\ \&\ n > m\}$

2. Mějme množinu X a množinu čísel opačných, tedy $-X = \{-x \mid x \in X\}$. Dokažte, že platí: $\inf\{-x\} = -\sup\{x\}$

3. Příklad suprema podle dělitelnosti.

Bonus. Běžná definice suprema množiny $M \subseteq T$ říká, že je to číslo $s \in T$, které je nejmenší horní závorou.
(Tj. (i) $\forall x \in M : x \leq s$ a (ii) $\forall y \in T, y < s\ \exists x_y \in M : y < x_y$).
Záleží na požadavku, že $y \in T$? Co kdybychom požadovali pouze $y \in M$?
Najděte rozdíl (např. na konkrétním příkladu množiny M).

Domácí úkol (26.10.)

1. Najděte (pokud existují) supremun a infimum množiny $B \subset R$,
   $B = \{\sin x \cos x;\ x \in R\}$; existuje pro ni maximum a minimum? (1 bod)

2. Spočítejte přímo podle definice limitu posloupnosti $\{\ \frac{n+1}{n+2}\ \}_{n=1}^{\infty}$ (1 bod)

3. Spočítejte limitu posloupnosti (pečlivě zdůvodněte):
   $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-3)^{20}(3n+2)^{30}}{(2n+1)^{50}}$ (1 bod)

Řešení:

1a. $\sup A_1 = 0, \inf A_1 = -1 = \min, \max$ neex.
1b. $\sup A_2 = \frac{3}{2} = \max, \inf A_2 = 0 = \min$
1c. $\sup A_3$ neex., $\inf A_3 = 0, \min$ neex.
1d. $\sup A_4 = \sqrt{3}, \inf, \max, \min$ neex.