

6. Cvičení z MA I. (10.11. a 18.11.2015)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Rozcvička. Spočítejte následující limity (nebo dokažte, že neexistují):

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 3}) \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} (n - 5 \cdot \lfloor \frac{n}{5} \rfloor) \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - 5 \cdot \lfloor \frac{n}{5} \rfloor)}{n}$$

1. Spočítejte následující limity:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor^3}{n - \lfloor \sqrt{n+9} \rfloor} \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i}{n} \cdot \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^n \quad (i \text{ je imaginární číslo})$$
$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}) \quad (d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{\sqrt{n^7} + \sqrt[3]{n^7}} - \sqrt[3]{\sqrt{n^7} - \sqrt[3]{n^7}} \right)$$
$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

2. Dokažte, že následující rekurentně zadaná posloupnost $\{a_n\}$ má limitu a spočítejte ji:

$$(a) \quad a_1 = \sqrt{c} \quad (c > 0, c \in \mathbb{R}), \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}$$
$$(b) \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}$$
$$(c) \quad a_1 = t \quad (t > 0 \text{ je parametr}), \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right) \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}$$

3. Určete limity v závislosti na parametrech $k, l \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$, $|b| < 1$:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k - (n-1)^l}{n^k + n^l} \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k + n^{k-l} + \dots + n+1}{n^l + n^{l-l} + \dots + n+1}$$
$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + a^{n-l} + \dots + a+1}{b^n + b^{n-l} + \dots + b+1}$$

4. Zjistěte, pro která reálná čísla x je následující posloupnost monotonní:

$$\left\{ \left(\frac{x^3}{3x-2} \right)^n \right\}$$

Dů na 16.11. a 24.11.2015:

1. Určete limity v závislosti na $k, l \in \mathbb{N}$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k + (-n)^l}{(n-1)^k - n^l}$

2. Spočítejte: $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$

3. Dokažte, že následující rekurentně zadaná posloupnost $\{a_n\}$ má limitu a spočítejte ji: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$
(tip: rozdělte na liché a sudé členy)

Řešení:

1a. 2 1b. 0 1c. 0 1d. $\frac{2}{3}$ 1e. neex.

3. 1 pro $k > l$, -1 pro $k < l$, 0 pro $k = l$

4. konst. pro $x \in \{-2, 0, 1\}$, rost. pro $x \in (-\infty; -2) \cup (\frac{2}{3}; 1) \cup (1; +\infty)$, kles. pro
pro $x \in (-2; 0)$

Dú 1. 1 pro $k > l$, $(-1)^{1+l}$ pro $k < l$, $-\infty$ pro $k = l$ sudé, -1 pro $k = l$
liché

Dú 2. $\frac{1}{2}$