

#### 4. Cvičení z MA I. (27.10., 4.11. 2015)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Co je to posloupnost, monotónní posloupnost? Jaká je definice limity pro posloupnosti; nevlastní limita?

1. Rozhodněte, zda jsou následující posloupnosti monotónní.

- (a)  $\{2n + (-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$       (b)  $\left\{\frac{1}{1+n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$   
(c)  $\left\{\frac{n+1}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$       (d)  $\left\{\frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n-2}}\right\}_{n=1}^{\infty}$

2. Spočítejte přímo podle definice limitu posloupnosti.

- (a)  $\left\{\frac{1}{1+n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$       (b)  $\left\{\frac{n+1}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$  (domácí úkol)

3. Spočítejte následující limity (nebo dokažte, že neexistují):

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$       (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(-1)^n$   
(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n!}$       (d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n}$   
(e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+5n}{-n^2+4n}$       (f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+5^n+10^n}{-2^{n+1}+5^{n+1}+10^{n+1}}$   
(g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^2(n\pi/4)$       (h)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin n^2$   
(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+5} - \sqrt{n-1}$       (j)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}$   
(k)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{n}}$       (l)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+4n+n \sin n}{n \cos 3n + (2n + \sin n)^2}$

4. Spočítejte následující limity (nebo dokažte, že neexistují):

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$       (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k}{n+2} - \frac{n}{2}$       (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k}{\sqrt[3]{8n^6-n}}$   
(d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \lfloor xk \rfloor}{n^2}$  (parametr  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lfloor x \rfloor$  ... celá část  $x$ )

**Domácí úkol** (na 2.11.):

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^3}{n^4}$  (1 bod)  
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$  (1 bod)  
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2} - \sqrt[2]{n^3+1}}$  (1 bod)

**Řešení:**

1a. nekles.    1b. kles.    1c. rost.    1d. kles. (tady byla chyba)

2a. 0

3a. neex.    3b.  $\cos 1$     3c. 1    3d. 0    3e.  $-3$     3f.  $\frac{1}{10}$     3g. neex.    3h. 0    3i. 0    3j.

0    3k. 1    3l.  $\frac{1}{2}$

4a. 1    4b.  $-\frac{1}{2}$     4c.  $\frac{1}{4}$     4d.  $\frac{x}{2}$