

## 8. a 9. Cvičení z MA I.

(1.12. a 8.12.2015 / 2.12. a 9.12.2015)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Co jsou to (číselné) řady a jak se definuje jejich součet? Kdy řada konverguje? Nutná a postačující podmínka konvergence. Alternující řady a Leibnizovo kritérium.

1. Rozhodněte, zda následující řady konvergují.

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$  (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$   
(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$  (d)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$  [KN]  
(e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n-\ln n}$  (f)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$

2. Lineární kombinace pro řady – dokažte následující:

- (a) Jestliže řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje a  $\alpha \in R$ , pak řada  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$  konverguje též. Přitom platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

- (b) Jestliže řady  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  a  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergují, pak konverguje též řada  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ .  
Přitom platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

3. Rozhodněte, zda následující řady konvergují, konvergují absolutně, případně divergují:<sup>1</sup>

- (a)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{\sqrt{n}}$  [D] (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n+\ln n}$  [D]  
(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$  [KA] (d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^2+3n}$  [D]  
(e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{2^n}}$  [KA] (f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$  [D]  
(g)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n$  [KA] (h)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n-\ln n}$  [KN]  
(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+3n+4}{2n^4+3}$  [KA] (j)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$  [D]

---

<sup>1</sup> D ... diverguje, KA ... konverguje absolutně, KN ... konverguje neabsolutně

4. Rozhodněte, zda následující řady konvergují, konvergují absolutně, případně divergují v závislosti na parametru  $x \in \mathbb{R}$ :

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$  [KA pro všechna  $x$ ]
- (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+nx}{\sqrt{n^2+n^6x^2}}$
- (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$  [KA pro  $|x| < 1$ , D pro  $|x| > 1$ , KN pro  $|x| = 1$ ]
- (d)  $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 x^n$  [KA pro  $|x| < 1$ , D pro  $|x| \geq 1$ ]

**Dů (na 7.12.2015 / na 8.12.2015):**

1. Zjistěte, zda následující řada konverguje:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{n^2 + 2}{n^3 + n}$$

(1 bod)

2. Zjistěte, pro která  $a \in \mathbb{R}$  následující řada konverguje absolutně, resp. konverguje neabsolutně, resp. diverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1 + a^n}$$

(2 body)

**Dů (na 14.12.2015 / na 15.12.2015):**

Rozhodněte, zda následující řady konvergují, konvergují absolutně, případně divergují (v závislosti na parametru  $x \in \mathbb{R}$ ):

- 1.  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln x}$  [KA pro  $x \in (0, 1/e)$ , D pro  $x \geq 1/e$ ]
- 2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2 \pi) \cdot (\sqrt{n+11} - \sqrt{n+2})$  [KN]
- 3.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^x}$  [KA pro  $x > 1/2$ , jinak D]