

3. Cvičení z MA II. (8.3.2016)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Co jsou to primitivní funkce? Jaké má vlastnosti (spojitost)? Kdy má funkce primitivní funkci (spojitost)?

1. Určete primitivní funkce k následujícím funkcím (na největších možných intervalech):

(a) $\int x^3 + 2x + \frac{16}{x} dx$ (b) $\int 18e^x + 16e^{8x} - \frac{1}{x} + 3 \cos x dx$ (c) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$

(d) $\int (3e^x + \frac{1}{x}) dx$ (e) $\int (\frac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{x}) dx$ (f) $\int \frac{x^2-1}{x} dx$

(g) $\int (\sqrt[3]{x} + x^2) dx$ (h) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$ (i) $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx$

(j) $\int \frac{1}{(3x^2-2x-1)} dx$

2. ‘Lepení’ primitivních funkcí:

(a) $\int |x| dx$ (b) $\int f(x) dx$, kde $f(x) = 0$ ($x \leq 0$), $f(x) = x$ ($x > 0$)

(c) $\int \sqrt{x^6} dx$ (d) $\int |\cos x| dx$

Domácí úkol na 14.3.2016:

Vypočítejte na celém intervalu, kde to dává smysl:

(1) $\int \frac{1}{(x-a)^n} dx$, kde $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$

(2) $\int |\sin x + \cos x| dx$

(3) $\int 5^x \sin x dx$

Zopakovat/naučit se/pochopit metodu per partes.

Řešení: (až na c)

1a. $\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 16 \log|x|$, na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$

1b. $18e^x + 2e^{8x} - \log|x| + 3 \sin x$, na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$

1c. $\frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2}$, na R

...

1j. $\frac{1}{4} \log \left| \frac{x-1}{3x+1} \right|$, na $(-\infty, -\frac{1}{3})$ a na $(-\frac{1}{3}, 1)$ a na $(1, \infty)$

2a. $\operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{x^2}{2}$, na R

2b. $F(x) = c$ na $< -\infty, 0 >$, $F(x) = \frac{x^2}{2}$ na $< 0, \infty >$

2c. $\frac{1}{4}|x| \cdot x^3$, na R

2d. $(-1)^k \sin x + 2k$, na $x \in < -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi >$, $k \in Z$

Dů:

1. $\frac{1}{1-n} \frac{1}{(x-a)^{n-1}}$, na $(-\infty, a)$ a na (a, ∞) pro $n > 1$; $\log(x-a)$, na (a, ∞) pro $n = 1$; $\log(a-x)$, na $(-\infty, a)$ pro $n = 1$

3. $\frac{5^x}{1+\log^2 5} (\log 5 \cdot \sin x - \cos x)$, na R