1. Cvičení z MA II. (23.2.2016)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Aplikace průběhů funkcí
Jak se pomocí derivace pozná, kde má funkce maximum/minimum? Kde je rostoucí/klesající? Co je tečna funkce v daném a jak souvisí s konvexitou ?

1. Který z obdélníků o obvodu l má největší obsah?

2. Který z válců o objemu V má nejmenší povrch?

3. Z čtvercového listu papíru odstřihneme v rozích malé čtverce a složíme krabičku (bez víka). Jak velké čtverce máme odstřihnout, aby vzniklá krabička měla co největší objem?

4. Bazén má mít tvar pravoúhlého rovnoběžnostěnu s objemem 200 m^3. Délka má být čtyřnásobkem šířky. 1 m^2 základny je dvakrát levnější než 1 m^2 stěny. Jaké mají být rozměry bazénu, aby její stavba byla nejlevnější?

5. Z chodby o šířce A odbočuje chodba o šířce B. S jak dlouhou tyčí je možno zatočit? (Pro jednoduchost: tyč chceme nést vodorovně.)

6. Dokažte a zapamatujte si následující nerovnosti.

(a) Pro všechna $x \in R$ platí $e^x \geq 1 + x$.

(b) Pro všechna $x \in (-1, \infty)$ platí $\ln(1 + x) \leq x$.

(c) Pro všechna $x \geq 0$ platí $\sin x \leq x$.

Domácí úkol na 29.2.2016:

1. Jak velký sněhulák (ze tří koulí) lze vyrobit z koule o poloměru 1 metr? [2 body]

Tip – Jensenova nerovnost:
Pro konvexní funkci f na $\langle a, b\rangle$ a čísla $x_i \in \langle a, b\rangle$ a α_i taková, že $\alpha_i \in \langle 0, 1\rangle$, $\sum_i \alpha_i = 1$ platí, že

$$f(\sum_i \alpha_i x_i) \leq \sum_i \alpha_i f(x_i)\,.$$

2. Dokažte, že funkce $(1 + 1/x)^x$ je rostoucí ($x \in R^+$). [1 bod]

3. Pomocí Taylorova polynomu spočtěte následující limitu:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$

[1 bod]