

6. Cvičení z MA II. (29.3.2016)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Určete primitivní funkce k následujícím funkcím:

1. Rozcvička:

$$(a) \int \frac{\log x}{x(1+\log x)} dx \quad (b) \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$$

$$(c) \int \arccos x dx \quad (d) \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$$

2. Zvolte vhodnou substituci a spočítejte (na intervalech, které jsou ‘přirozeným’ definičním oborem výsledných primitivních funkcí):

$$(a) \int \frac{1}{1+\operatorname{tg} x} dx \quad (b) \int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} dx \quad (c) \int \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} dx$$

$$(d) \int \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 5} dx \quad (e) \int \frac{1}{5+4 \sin x} dx \quad (f) \int \frac{1}{(2+\cos x) \sin x} dx$$

$$(g) \int \frac{1}{\sin x \cos^4 x} dx \quad (h) \int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx$$

3. Nepříjemné substituce (b-g NEPOVINNÉ)]:

$$(a) \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx \quad (b) \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (c) \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$$

$$(e) \int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}} dx \quad (f) \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}} dx \quad (g) \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+5x+1}} dx$$

4. Příklady písemkového typu (doc. Kalenda):

$$(a) \int \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x + 2} dx \quad (c) \int \frac{x^2+1}{(x-1)(x^2-1)(x^2+x+1)} dx$$

$$(d) \int \frac{(\operatorname{tg} x + \cotg x)^2}{\sin^2 x - \cos^2 x} dx \quad (e) \int \frac{\sin x}{9 \cos^2 x + 2 \sin^4 x} dx$$

Domácí úkol na 4.4.2016:

$$(1) \int \frac{1}{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x} dx$$

$$(2) \int \frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}} dx$$

$$(3) \int \frac{8+6x-2x^2}{x^4-4x+3} dx$$

Řešení: (až na c)

1a. $\log x - \log |1 + \log x|$, na $(0, \frac{1}{e})$ a na $(\frac{1}{e}, \infty)$ **1b.** $(x+1) \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}$, na $(0, \infty)$

1c. $x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2}$, na $(-1, 1)$ **1d.** $-2\sqrt{1-x} \cdot \arcsin \sqrt{x} + 2\sqrt{x}$, na $(0, 1)$

2a. $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \log |\sin x + \cos x|$, na $D_f(x \neq -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$ **2b.**

$x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x)$, platí na D_f mimo body $\frac{\pi}{2} + k\pi$, posun vždy o $-\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ **2c.**

$\frac{-1}{1+\operatorname{tg} x}$, na D_f mimo $\frac{\pi}{2} + k\pi$, lze spoj. dodef. 0 **2d.** $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{5}}(3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1))$

, mimo $\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, posun vždy o $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$ **2e.** $\frac{2}{3} \operatorname{arctg}(\frac{1}{3}(5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4))$, mimo

$(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$, posun vždy o $\frac{2\pi}{3}$ **2f.** $\frac{1}{6} \log((1-\cos x)(2+\cos x)^2/(1+\cos x)^3)$, mimo

$k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ($\equiv \frac{1}{3} \log(|t|(t^2+3))$), kde $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ **2g.** $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3} \frac{1}{\cos^3 x} + \frac{1}{2} \log \sqrt{\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}}$

($\equiv \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3} \frac{1}{\cos^3 x} + \log |\operatorname{tg} \frac{x}{2}|$), mimo $\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ **2h.** $\log(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1})$, na \mathbb{R}

3a. $\log |\frac{1+t}{1-t}| - 2 \operatorname{arctg} t$, kde $t = \sqrt{\frac{x-1}{1+1}}$ **3b.** $\log |x + \sqrt{x^2+1}| = \operatorname{argsinh}$

x na \mathbb{R} **3c.** $\log |x + \sqrt{x^2-1}|$ na int. $(-\infty, -1)$ na $(1, \infty)$ **3d.** $\log |t| +$

$\frac{3}{1+2t} - \frac{3}{2} \log |1+2t|$ na \mathbb{R} **3e.** vede na $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$ **3f.** $\log |\frac{t-1}{t+1}|$, kde

$\sqrt{x^2+5x+1} = x+t$, tedy $\log \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-2}$

4a. $\log \frac{t^2+2t+3}{t^2+1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t+1}{\sqrt{2}} - \frac{1+t}{t^2+1} + k \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ na int. $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, kde

$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; lze "slepit" v krajních bodech (např. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ pro $x = \pi$) **4c.** $-\frac{1}{6} \log |x -$

$1| - \frac{1}{3(x-1)} + \frac{1}{2} \log |x+1| - \frac{1}{6} \log(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ na $(-\infty, -1)$ a na

$(-1, 1)$ a na $(1, \infty)$ **4d.** $\operatorname{tg} x + \cotg x + 2 \log |\operatorname{tg} x - 1| - 2 \log |\operatorname{tg} x + 1|$ na int.

$(\frac{k\pi}{4}, \frac{(k+1)\pi}{4})$ **4e.** $-\frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \cos x) + \frac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{\sqrt{2}}$ na \mathbb{R}

Dů1. $-\frac{1}{2}(\cotg x + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} x))$, mimo $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (posuny o $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$)

Dů2. $\arcsin(\frac{2}{3}(x - \frac{1}{2}))$, nebo $2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x+1}{2-x}}$