12. cvičení z MA II. (10.5.2016)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Tečná nadrovina. Nechť $G \subset R^n$ otevřená, $a \in G$, $f \in C^1(G)$. *Tečnou nadrovinou ke grafu funkce f v bodě* $[a, f(a)]$ rozumíme graf fce T, $x \in R^n$:

$$T : x \mapsto f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n)$$

1. Anuloid $A = (x^2 + y^2 + z^2 + 12)^2 - 64(x^2 + y^2) = 0$ popište jako sjednocení grafů dvou fcí dvou proměnných. Existuje k tomuto anuloidu tečná rovina v bodě $[0, 3, \sqrt{3}]$?

2. Nechť $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y - 4$.
Určete tečnu T, která je kolmá k přímce $\{[t, t, t] \in R^3; t \in R\}$. Ve kterém bodě protíná T přímku $\{(0, 0, t) \in R^3; t \in R\}$?

Co to je **(totální) diferenciál** funkce $f : G \to R$ ($G \subset R^n$ otevřená) v bodě $a \in G$ (značíme $Df(a)$)?
Jak souvisí totální diferenciál s parciálními derivacemi?

1. Ověřte podle definice, že lineární funkce $L(h_1, h_2) = 2(h_1+h_2)$ je diferenciálem funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ v bodě $(1, 1)$.

2. Vyšetřete, zda lze funkci $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2} \log(1 + xy)$ dodefinovat v nějakém okolí počátku tak, aby v něm měla diferenciál.

3. Vypočtěte totální diferenciál funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ v bodě $a = (1, 2, -1)$; jaká bude jeho hodnota ve směru $h = (-1, 1, 1)$?

Domácí úkol na 16.5.2016
1. Buď dána funkce

$$f(x, y) = \arccos \frac{x}{x + y}$$

a) Najděte definiční obor D funkce f a načrtněte jej.
b) Určete gradient funkce $\nabla f(x, y)$ v bodě $[1, 1]$.
c) Je funkce f v tomto bodě diferencovatelná? Pokud ano, napište její totální diferenciál v tomto bodě.
d) Aproximujte f pomocí diferenciálu v bodě [1,04; 0,99].
[2 body]

2. Zjistěte, zda lze následující funkci $f(x, y)$ dodefinovat tak, aby měla ve všech bodech R^2 totální diferenciál: [1 bod]

$f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2+y^2}$

Řešení:
geometrie
1. $z = \frac{y}{\sqrt{3}}$, $\quad D_f : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 36$, spojitost na D_f, ex. parc. der. na okolí b. $[0,3]$, jsou spoj. v b. $[0,3]$

2. tečna $z = f(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}) - (x - \frac{2}{3}) - (y - \frac{5}{2})$, protíná x v b. $[0, 0, ?\frac{17}{2}]$
$y = 0,\ x^2 + y^2 = 1\}$