13. Cvičení z MA II. (17.5.2016)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Totální diferenciál.
Co to je totální diferenciál? Co to je směrová derivace? Jak souvisí totální diferenciál s derivacemi ve směru?

1. Buď dána funkce
$$f(x, y) = \log(x + y^2)$$
(a) Najděte definiční obor D funkce f a načrtněte jej.
(b) Vypočítejte gradient funkce $\nabla f(x, y)$ v bodě $[0, 1]$.
(c) Je funkce f v bodě $[1, 1]$ diferencovatelná? Pokud ano, napište její totální diferenciál v tomto bodě.
(d) Aproximujte hodnotu funkce f v bodě $[0, 04; 0, 99]$ pomocí totálního diferenciálu $D_{f(0,1)}$.
(e) Napište rovnici tečné roviny ke grafu f v bodě $[0, 1, 0]$.

2. Vypočtěte derivace následující funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ ve směru $h = (-1, 1, 1)$ v bodě $a = (1, 2, -1)$.

Vázané extrémy – Lagrangeovy multiplikátory.

3. Zjistěte lokální extrémy funkcí na zadaných množinách – využijte Lagrangeových multiplikátorů.

(a) $f(x, y) = y$ na množině $M = \{(x, y) \in R^2 \mid x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$

(b) $f(x, y) = y^2 - 2x + x^2$ na množině $M = \{(x, y) \in R^2 \mid x = y^2\}$

Věta o implicitních funkcích.

4. Je zadaná funkce $F(x, y)$ a dvě čísla x_0, y_0 taková, že $F(x_0, y_0) = 0$. Dokažte, že v nějakém okolí U bodu (x_0, y_0) existuje funkce $f = f(x)$ splňující podmínky $f(x_0) = y_0$ a $F(x, f(x)) = 0$ pro všechna $x \in U$. Určete $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$.

(a) $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4,\ \ (x_0, y_0) = (6, 2)$

(b) $F(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1,\ \ (x_0, y_0) = (0, 1)$