8. Cvičení z MA II. (12.4.2016)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Aplikace určitého integrálu.

1. Plocha pod křivkou.

Pro křivku $y = f(x)$ (pro $x \in \langle a, b\rangle$) má plocha pod křivkou obsah $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$.
Je-li křivka dána parametricky $x = \phi(t),\ y = \psi(t)$ (pro $t \in \langle a, b\rangle$; $\phi(t)$ a $\psi(t)$ spojité; $\phi(t)$ ryze mon. se spoj. derivací na $\langle a, b\rangle$), pak je plocha pod touto křivkou $\int_a^b \psi(t)\phi'(t)\ dt$.
Najděte obsah omezené rovinné oblasti ohraničené křivkami:

(a) sinusovkou na $\langle 0, \pi\rangle$
(b) $y = x^2,\ y = x$
(c) $y = \cos x,\ y = \sin x,\ x = 0$
(d) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ y = \frac{1}{1+4x^2},\ x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
(e) Určete plochu obdélníku.

2. Délka křivky.

Délka křivky $y = f(x)$ $(x \in \langle a, b\rangle)$ je dána předpisem $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ \mathrm{d}x$.
Délka křivky dané parametricky $x = \phi(t),\ y = \psi(t)$ (pro $t \in \langle a, b\rangle$; $\phi(t)$ a $\psi(t)$ mají spoj. derivace na $\langle a, b\rangle$) je $\int_a^b \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\ dt$.

(a) Najděte délku křivky $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ na intervalu $x \in \langle 0, 3\rangle$.

(b) Spočítejte délku kružnice o poloměru r.

3. Objem rotačního tělesa.

Objem rotačního tělesa vzniklého rotací křivky $y = f(x)$ $(x \in \langle a, b\rangle)$ kolem osy x je $\int_a^b \pi f(x)^2\ \mathrm{d}x$.

(a) Nechť M je oblast ohraničená grafem funkce $f(x) = \sqrt{x \cdot \sin x}$ a osou x na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$. Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací M kolem osy x.

(b) Ověřte vzorec pro výpočet objemu kužele s poloměrem podstavy r a výškou v.
(c) Nekonečný "trychtýř" vzniklý rotací funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ pro $x \in \langle 1, \infty)$ kolem osy x.

(d) Těleso vzniklé rotací funkce $y = \sqrt[3]{x}$ pro $y \in [1, 2]$ kolem osy y.

Tip (nenapadne-li vás něco lepšího): **Guldinovo pravidlo pro objem:** Objem rotačního tělesa vzniklého rotací rovinné množiny M kolem přímky p, neprotínající množinu M, je rovna součinu obsahu množiny M a délky kružnice o poloměru rovném vzdálenosti těžiště množiny M od p.

4. Povrch rotačního tělesa
Povrch tělesa vzniklého rotací křivky $y = f(x)$ $(x \in \langle a, b\rangle)$ kolem osy x je $\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\ \mathrm{d}x$.

(a) Paraboloid (satelitní anténa) vzniklá rotací křivky $y = c\sqrt{x}$ pro $x \in \langle 0, b\rangle$.
(Reálné parametry by mohly být $b = 0.3m$, $c = 1.8m^{1/2}$).

(b) Anuloid vniklý rotací kružnice o poloměru r kolem osy procházející rovinou kružnice a vzdálené R od jejího středu;

(d) Jednodílný hyperboloid (chladící věž elektrárny) daný rovnicí $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$
(U Temelína je patní průměr 130.7m, průměr v koruně 82.6 m, výška 155 m. Dost jistě je $a = b$, c už lze dopočítat.)

(e) Nekonečný "trychtýř" vzniklý rotací funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ pro $x \in \langle 1, \infty)$ kolem osy x.

Tip: **Guldinovo pravidlo pro povrchy:** Plocha rotační plochy vytvořené rotací rovinné křivky ϕ kolem přímky p je rovna součinu délky křivky ϕ a obvodu kružnice o poloměru rovném vzdálenosti těžiště křivky ϕ od p.

5. Odhady sum – integrální kritérium.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ $(s > 0)$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log n}$

(c) Odhadněte (pomocí integrálu) velikoxt $n!$.
Tip: Použijte logaritmu.

Domácí úkol na 18.4.2016:

1. Určete plochu elipsy.
2. Určete délku křivky $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ na intervalu $x \in \langle 0, \gamma\rangle$
   (kde $a, \gamma > 0$ parametry)
3. Určete objem anuloidu (duše od pneumatiky) vzniklého rotací kružnice o poloměru r kolem osy procházející rovinou kružnice a vzdálené R od jejího středu.
   Tip: rovnice anuloidu $\ldots (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2)$