

9. Cvičení z MA II. (19.4.2016)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Spojítost. Jak se definuje spojitá funkce (různé definice)?

1. Ukažte, že polynomy více proměnných jsou spojitě funkce $P : R^n \rightarrow R$.

2. Zkoumejte následující funkce na $(R^n, \text{eukleid. metrika})$ – určete definiční obor (jde o ot. či uz. množinu?), spojitost, vrstevnice. Nabývají tyto funkce na svém definičním oboru globálního maxima a minima?

(a) $f(x, y) = \sqrt{\log(x - y)}$ (b) $f(x, y) = \log(\sqrt{y + 1} - x)$

(c) $f(x, y) = \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{y^2}{x^2} - 1}$ (d) $f(x, y, z) = \sqrt{\frac{z^2}{x^2 + y^2} - 1}$

(e) $f(x, y) = x^2 - y^2$ (f) $f(x, y) = \frac{x}{y}$

(g) $f(x, y) = \arcsin xy$ (h) $f(x, y) = \arcsin \frac{y}{x+1}$

3. Jsou následující fce spojitě? Nabývají na R^2 své největší a nejmenší hodnoty? Jaké?

(a) $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ pro $[x, y] \neq [0, 0]$, $f(0, 0) = 0$

(b) $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ pro $[x, y] \neq [0, 0]$, $f(0, 0) = 0$

4. Lze následující funkce spojitě rozšířit na R^2 ?

(a) $f(x, y) = (x + y)^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$

(b) $f(x, y) = \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

(c) $f(x, y) = \frac{\sin xy}{x^2 + y^2}$

Domácí úkol na 25.4.2016:

U příkladů (1) a (2) vyšetřete spojitost. Lze dané funkce spojitě dodefinovat na R^2 ?

(1) $f(x, y) = \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2}$

(2) $f(x, y) = \frac{\sin x + \sin y}{x + y}$

(3) Ukažte, že je-li funkce f spojitá na R^n , potom množina $M = \{x \in R^n; f(x) < 0\}$ je otevřená.

Řešení:

2a-h. spojité na svých definičních oborech

3a. není spojitá v b. $[0, 0]$, omezená

3b. spojitá, není omezená

4a. spojitá pro $f([0, 0]) := 0$

4b. spojitá pro $f([0, 0]) := 0$

4c. nelze spojitě dodefinovat v b. $[0, 0]$