5. Cvičení z MA II. (22.3.16)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

1. Spočítejte primitivní funkce:

(a) $\int x^n \ln x \ \mathrm{d}x$ (b) $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \ \mathrm{d}x$ (c) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} \ \mathrm{d}x$

(d) $\int \sin x \cdot \sqrt{2+\cos x} \ \mathrm{d}x$ (e) $\int \frac{e^{5x}-1}{e^{2x}} \ \mathrm{d}x$ (f) $\int x \cdot \sqrt{x^2+1} \ \mathrm{d}x$

(g) $\int x \cdot \sqrt{2-3x^2} \ \mathrm{d}x$ (h) $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} \ \mathrm{d}x$ (i) $\int \frac{1}{x^2-1} \ \mathrm{d}x$

(j) $\int \frac{5x}{2x+3} \ \mathrm{d}x$ (k) $\int \sin x \cos 2x \ \mathrm{d}x$ (l) $\int \sin x \sin 2x \ \mathrm{d}x$

(m) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} \ \mathrm{d}x$ (n) $\int \frac{1}{x+2\sqrt{x}+2} \ \mathrm{d}x$ (o) $\int \frac{x-1}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})} \ \mathrm{d}x$

3. Důležité příklady:

(a) $\int \frac{1}{\sin x} \ \mathrm{d}x$ (na $(0,\pi)$, např. užijte substituci tg $\frac{x}{2} = t$)

(b) $\int \frac{1}{1+3\sin^2 x} \ \mathrm{d}x$ (na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, užijte např. substituci tg $x = t$)

(c) Nepovinné: $\int \frac{1}{x+(\sqrt{x^2+x+1})} \ \mathrm{d}x$
(Nápověda: zkuste substituci $\sqrt{x^2+x+1} = x+t$)

4. A další příklady na určování primitivní funkce:

(a) $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x} \mathrm{d}x$ (b) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} \mathrm{d}x$

(c) $\int \frac{1}{e^{2x}+e^x-2} \mathrm{d}x$ (d) $\int \cos^2 x \ \mathrm{d}x$ (e) $\int \frac{1+\mathrm{tg}^2\mathrm{x}}{1+\mathrm{tgx}} \ \mathrm{d}x$

(f) $\int \sin^3 x \cos^2 x \ \mathrm{d}x$ (g) $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2} \ \mathrm{d}x$

Domácí úkol na 29.3.2016:

(1) $\int \frac{x^{17}-5}{x-1} \mathrm{d}x$

(2) $\int \log(x+\sqrt{1+x^2}) \ \mathrm{d}x$

(3) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x(1-\cos x)} \ \mathrm{d}x$

Zopakovat/naučit se/pochopit, jak fungují standardní substituce $t = \mathrm{tg}\ \frac{x}{2}$, $t = \mathrm{tg}\ x$.
Nepovinné: Eulerova substituce $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x+t$ nebo $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt+\sqrt{c}$, (pokud ax^2+bx+c nemá R kořeny a $a>0, c>0$).

Řešení: (až na c)
1m. $2\sqrt{x}-2\log|1+\sqrt{x}|$ na $(0,+\infty)$
1n. $\log(x+\sqrt{x}+2)-2\mathrm{arctg}(\sqrt{\mathrm{x}}+1)$ na $(0,+\infty)$
1o. $3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+6\log\sqrt[6]{x}+6\frac{1}{\sqrt[6]{x}}-3\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+2\frac{1}{\sqrt{x}}$ na R

3a. $\log \mathrm{tg}\ \frac{x}{2} \equiv \frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$, na $(0,\pi)$
3b. $\frac{1}{2}$ arctg $(2\ .\ \mathrm{tg}x)$, na $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$
3c. $\sqrt{x^2+x+1}-x+2\log|\sqrt{x^2+x+1}-x-2|-\frac{1}{2}\log|2\sqrt{x^2+x+1}-2x-1|$, na $(-\infty,-1)$ a na $(-1,\infty)$

4a. $\frac{-10\cdot 5^{-x}\log 2+2^{-x}\log 5}{5\log 5\log 2}$, na R
4b. $\frac{1}{2}e^{2x}-e^{x}+x$, na R
4c. $-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\log|e^x-1|+\frac{1}{6}\log(e^x+2)$, na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$
4d. $\frac{1}{2}(\sin x\cos x+x)$, na R
4e. $\ln|1+\mathrm{tg}\ x|$ na $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,-\frac{\pi}{4}+k\pi)$ a na $(-\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$
4f. $\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x$, na R **4g.** $\frac{1}{\cos x-1}$, na $(2k\pi,2(k+1)\pi), k\in Z$
Dú1. $\sum_1^{17}\frac{x^k}{k}-4\log|x-1|$, na $(-\infty,1)$ a na $(1,\infty)$
Dú2. $x\log(x+\sqrt{x^2+1})-\sqrt{x^2+1}$, na R
Dú3. $-\frac{1}{4}\log(1+\cos x)-\frac{3}{4}\log(1-\cos x)+\frac{1}{2(\cos x-1)}$ na $(k\pi,(k+1)\pi)$
$=-\frac{3}{2}\log|t|-\frac{1}{4t^2}+\log|1+t^2|$, kde $t=\mathrm{tg}\ \frac{x}{2}$