10. a 11. Cvičení z MA I. (3. a 10. 12. 2014)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Co je to funkce? Jak se definuje limita funkce v bodě? Kdy je funkce spojitá?

1. Dokažte, že funkce f je na intervalu I rostoucí, právě když platí

$$\forall x, y \in I, x \neq y : \tfrac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0$$

2. Dokažte, že je-li f neklesající na $(-\infty, a\rangle$ a nerostoucí na $\langle a, +\infty)$ pro nějaké $a \in R$, pak f nabývá maxima.

3. Nechť f nabývá minima v $a \in R$. Musí existovat $\epsilon > 0$ takové, že f je nerostoucí na $(a-\epsilon, a\rangle$ a neklesající na $\langle a, a+\epsilon)$?

4. Které z následujících operací provedených na neklesající funkce f, g dává opět neklesající funkci?

(a) $f+g$ (b) $f-g$ (c) $\max\{f,g\}$ (d) $\min\{f,g\}$ (e) $f \circ g$

5. Spočítejte limity nebo dokažte, že neexistují.

(a) $\lim_{x\to a} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$, pokud $a = 0, 1, +\infty, -\infty$ [1 pro $a = 0$; 2/3 pro $a = 1$; 1/2 pro $a = +-\infty$]

(b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ $[\frac{1}{2}]$

(c) $\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$ $[(\frac{3}{2})^{10}]$

(d) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3-x^2-x+1}$ $[neex.]$

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$ $[\frac{3}{2}]$

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ $(n \in N)$ $[\frac{1}{n}]$

(g) $\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1}$ $(m, n \in N)$ $[\frac{m}{n}]$

(h) $\lim_{x\to 1} \frac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$ $[\frac{1}{2}n(n+1)]$

(i) $\lim_{x\to 1}(\lfloor x \rfloor - x)$ [neex.]

(j) $\lim_{x\to 0} x \cdot \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ [1]

(k) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ $(m, n \in N)$ $[\frac{n}{m}]$

(l) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$ $[\frac{1}{2}mn(n-m)]$

6. Spočítejte následující limity:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x+1}{\cos x-1}$ $[-\infty]$

(b) $\lim_{x\to +\infty} \sin\left(\pi \cdot \frac{4\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[4]{x^2+1}}\right)$ [0]

(c) $\lim_{x\to -\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}x \cdot (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})\right)$ $[-1]$

(d) $\lim_{x\to 16} \sqrt{\frac{4-\sqrt{x}}{64-\sqrt{x^3}}}$ $[\frac{1}{4\sqrt{3}}]$ (e) $\lim_{x\to 0} e^{\frac{\sqrt[3]{1-x^2}-1}{5x^2}}$ $[e^{-\frac{1}{15}}]$

(g) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{\cos x+2}{x^2+x}}$ $[0]$

(h) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\text{arccotg } x}{x}$ $[0]$ (i) $\lim_{x\to 2} \left(\text{arctg } (\frac{1}{2-x})\right)^2$ $[\frac{\pi^2}{4}]$

7. Ukažte, že platí (a zapamatujte si !!!):

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

8. Spočítejte následující limity:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg } (x^2)}{x\cdot\sin 3x}$ $[\frac{1}{3}]$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{4^{3x}-1}{\ln(x+1)}$ $[3\ln 4]$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x+1}{\sin x}$ [neex.] (d) $\lim_{x\to +\infty} x\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)$ $[\ln 2]$

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-x^2)}$ $[-1]$ (f) $\lim_{x\to 3} \frac{\arcsin\ (x-3)}{x^2-3x}$ $[\frac{1}{3}]$

(g) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3x+2}{2x+3}\right)^{2x-1}$ $[+\infty]$ (h) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2+7}\right)^x$ $[1]$

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{1-4^x}{\sin 2x}$ $[-\ln 2]$ (j) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+\text{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ $[1]$

(k) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$ $[0]$

Dú. (6.1.2015) Spočítejte limity nebo dokažte, že neexistují.

(1) $\lim_{x\to +\infty} \left\{\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right\}$ $(a,b\in R)$ $[\frac{1}{2}(a+b)]$

(2) $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$ $[-3]$

(3) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{2^x+8^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ $[4]$