# 8. a 9. Cvičení z MA I. (19. a 26. 11. 2014)

**Markéta Lopatková**

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Co jsou to (číselné) řady a jak se definuje jejich součet? Kdy řada konverguje? Nutná a postačující podmínka konvergence. Alternující řady a Leibnizovo kritérium.

**1.** Rozhodněte, zda následující řady konvergují.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$ (d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ $[KN]$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n-\ln n}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$

**2.** Lineární kombinace pro řady – dokažte následující:

(a) Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\alpha \in R$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ konverguje též. Přitom platí:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(b) Jestliže řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují, pak konverguje též řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$.
Přitom platí:
$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

**3.** Rozhodněte, zda následující řady konvergují, konvergují absolutně, případně divergují:[1]

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{\sqrt{n}}$ [D] (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n+\ln n}$ $[D]$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$ $[KA]$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^2+3n}$ $[D]$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{2^n}}$ $[KA]$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ $[D]$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n$ $[KA]$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n-\ln n}$ $[KN]$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n^2+3n+4}{2n^4+3}$ $[KA]$ (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ $[D]$

[1] $D$ ... diverguje, $KA$ ... konverguje absolutně, $KN$ ... konverguje neabsolutně

**4.** Rozhodněte, zda následující řady konvergují, konvergují absolutně, případně divergují v závislosti na parametru $x \in R$:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$ $[KA$ pro všechna $x]$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+nx}{\sqrt{n^2+n^6x^2}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ $[KA$ pro $\mid x \mid< 1, D$ pro $\mid x \mid> 1, KN$ pro $\mid x \mid= 1]$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 x^n$ $[KA$ pro $\mid x \mid< 1, D$ pro $\mid x \mid\geq 1]$

**Dú (na 25. 11. 2014):**

**1.** Zjistěte, zda následující řada konverguje:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n \cdot \frac{\pi}{2}) \cdot \frac{n^2+2}{n^3+n}$$

(1 bod)

**2.** Zjistěte, pro která $a \in R$ následující řada konverguje absolutně, resp. konverguje neabsolutně, resp. diverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^n}$$

(2 body)

**Dú (na 2. 12. 2014):**
Rozhodněte, zda následující řady konvergují, konvergují absolutně, případně divergují (v závislosti na parametru $x \in R$):

**1.** $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln x}$ $[KA$ pro $x \in (0, 1/e), D$ pro $x \geq 1/e]$

**2.** $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2\pi) \cdot (\sqrt{n+11} - \sqrt{n+2})$ $[KN]$

**3.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^x}$ $[KA$ pro $x > 1/2$, jinak $D]$