

2. Cvičení z MA I. (8.10.2014)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

A. VÝROKOVÁ LOGIKA (ještě z minulé hodiny)

Jak probíhá důkaz? Co je to přímý důkaz, nepřímý důkaz a co důkaz sporem?

7. Rozhodněte o pravdivosti a negujte:

(a) $\forall x \in N \quad \exists y \in N \quad \forall z \in N$ platí: $z > x \Rightarrow y < z$

(b) $\exists y \in N \quad \forall x \in N \quad \forall z \in N$ platí: $z > x \Rightarrow y < z$

(c) $\exists y \in N \quad \forall x \in N \quad \forall z \in R$ platí: $z > x \Rightarrow y < z$

8. Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

(a) $A \Rightarrow B, \neg B \Rightarrow \neg A, \neg(A \& \neg B), \neg A \vee B$

(b) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C, A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

9. Který z následujících výroků je silnější?

(a) $\forall x \in R \quad \exists K > 0, K \in R$ takové, že $|f(x+1) - f(x)| \leq K$

(b) $\exists K > 0, K \in R \quad \forall x \in R$ takové, že $|f(x+1) - f(x)| \leq K$

B. Jak probíhá důkaz MATEMATICKOU INDUKCÍ?

1. Dokažte, že pro všechna přirozená n platí:

(a) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ (b) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(c) $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad (= \sum_{k=1}^n k)^2$

(d) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$ pro $n \geq 2$ (e) Vypočítejte pro $x \in R$: $\sum_{k=1}^n x^k$

2. Dokažte tzv. de Morganova pravidla pro množiny A a B_i ($i = 1 \dots n$):

(a) $A \setminus \bigcap_{i=1}^n B_i = \bigcup_{i=1}^n (A \setminus B_i)$

$$(b) \quad A \setminus \bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcap_{i=1}^n (A \setminus B_i)$$

3. DokaŹte pro všechna pŹirozen n :

$$(a) \quad (2n)! < 2^{2n}(n!)^2 \qquad (b) \quad n^2 \leq 2^n$$

4. DokaŹte pro všechna pŹirozen n a reln x takov, Źe $0 \leq x_k \leq \pi$:

$$|\sin(\sum_{k=1}^n x_k)| \leq \sum_{k=1}^n \sin x_k$$

Bonus ("tŹŹk"): DokaŹte AG nerovnost pro všechna $x_i \in R, x_i \geq 0$ a $n \in N$:

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Domc: DokaŹte pro všechna pŹirozen n , kde e je základ pŹirozenho logaritmu:

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

(Nápověda: pro horní odhad lze uŹt AG nerovnost; dle platí $(1 + \frac{1}{n})^n \leq e$)