

13. Cvičení z MA II. (14.5.2015)

Lokální a globální extrémy funkce, vázané extrémy

Co to je Hessova matice funkce f v bodě a ? Co znamená, že je matice pozitivně / negativně (semi)definitní / indefinitní? Kdy to nastává?

Sylvestrovo kritérium: Kvadratická forma $q : R^n \rightarrow R$ je

- (i) pozitivně definitní, jestliže všechny hlavní subdeterminanty matice jsou kladné;
- (ii) negativně definitní, jestliže hlavní subdeterminant střídají znaménka (počínaje záporným);
- (iii) indefinitní, jestliže všechny hlavní subdeterminanty matice jsou nenulové a neplatí (i) ani (ii).

1. Najděte všechny lokální extrémy následujících funkcí:

- (a) $f(x, y) = x(3 - x^2) - y^2$
- (b) $f(x, y) = \frac{x^3}{3} - xy + \frac{y^2}{2}$
- (c) $f(x, y, z) = -x^3 + 3xz + 2y - y^2 - 3z^2$
- (d) $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$
- (e) $f(x, y) = 27xy^2 + 14x^3 - 69x - 54y$

2. Vyšetřete extrémy následujících funkcí na zadané množině:

- (a) $f(x, y) = xy^2$ na $M = \{[x, y] \in R^2; x^2 + y^2 = 1\}$
- (b) $f(x, y) = \sqrt{3}x - y + 2$ na $M = \{[x, y] \in R^2; x^2 + 2x + y^2 = 0\}$

3. Zjistěte lokální extrémy funkcí na zadaných množinách – využijte Lagrangeových multiplikátorů.

- (a) $f(x, y) = \sqrt{3}x - y + 2$ za podmínky $x^2 + 2x + y^2 = 0$
- (b) $f(x, y) = y$ na množině $M = \{(x, y) \in R^2 \mid x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$
- (c) $f(x, y) = y^2 - 2x + x^2$ na množině $M = \{(x, y) \in R^2 \mid x = y^2\}$

Bonusový domácí úkol:

Zjistěte lokální extrémy funkcí na zadaných množinách

- (1) $f(x, y) = x + 2y + \frac{3}{4}x^2 + xy + 2y^2$ na $M = \{x, y; y^2 - 2 \leq x \leq -y^2 + 2\}$
- (2) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11$ na množině
 $M = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 - 4x \leq 5\}$
- (3) $f(x, y) = x^2 - y^2$ na množině $M = \{(x, y) \in R^2 \mid y + e^{-x^2} - 1 = 0\}$

Řešení:

1a. ostré lok. max. v b. $(1, 0)$, v b. $(-1, 0)$ není lok. extrém

1b. ostré lok. min. v b. $(1, 1)$, v b. $(0, 0)$ není lok. extrém

1c. ostré lok. max. v b. $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4})$, v b. $(0, 1, 0)$ není lok. extrém

1d. ostré lok. min. v b. $(\frac{1}{2}, 1, 1)$, ostré lok. max. v b. $(-\frac{1}{2}, -1, -1)$

1e. ostré lok. min. v b. $(1, 1)$, ostré lok. max. v b. $(-1, -1)$, v b. $(\pm \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{\sqrt{14}}{3})$ není lok. extrém

2a. ostré lok. max. v b. $(-1, 0)$, $(\sqrt{\frac{1}{3}}, \pm \sqrt{\frac{2}{3}})$, ostré lok. min. v b. $(1, 0)$, $(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \pm \sqrt{\frac{2}{3}})$

2b. lokální=globální minimum v b. $(-\frac{\sqrt{3}+2}{2}, \frac{1}{2})$, lokální=globální maximum v b. $(\frac{\sqrt{3}-2}{2}, -\frac{1}{2})$

3a. lokální=globální minimum v b. $(-\frac{\sqrt{3}+2}{2}, \frac{1}{2})$, lokální=globální maximum v b. $(\frac{\sqrt{3}-2}{2}, -\frac{1}{2})$

3b. $(0, 0)$ není extrém; $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ ostrá lok. maximum vzhledem k M

3c. $(0, 0)$ ostrá lok. maximum vzhl. k M ; $(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$ ostrá lok. minima vzhl. k M

Dů:

1. vnitřek: podezřelý bod $(-\frac{2}{5}, -\frac{2}{5})$, hranice: podezřelé body $(0, \pm\sqrt{2})$, $(-2, 0)$, $(-1, -1)$, $(1, 1)$, $(\frac{2}{3}, \pm \frac{2}{\sqrt{3}})$; glob. minimum v b. $(-\frac{2}{5}, -\frac{2}{5})$, glob. maximum v b. $(0, \sqrt{2})$

2. $(3, 2)$ ostré lok. minimum; $(2 - \frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{6}{\sqrt{5}})$ ostré lok. maximum; podezřelý bod na hranici $(2 + \frac{3}{\sqrt{5}}, +\frac{6}{\sqrt{5}})$ není extrémem

3. $(0, 0)$ ostré lok. minimum