

11. cvičení z MA II. (7.5.2015)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Věta o implicitních funkcích.

1. Je zadána funkce $F(x, y)$ a dvě čísla x_0, y_0 taková, že $F(x_0, y_0) = 0$. Dokažte, že v nějakém okolí U bodu (x_0, y_0) existuje funkce $f = f(x)$ splňující podmínky $f(x_0) = y_0$ a $F(x, f(x)) = 0$ pro všechna $x \in U$. Určete $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$.

(a) $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4, (x_0, y_0) = (6, 2)$

(c) $F(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1, (x_0, y_0) = (0, 1)$

2. Funkce $f = f(x, y)$ je dána implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$ a podmínkou $f(x_0, y_0) = z_0$. Určete derivace f podle všech proměnných (a vypočítejte pro zadané body).

(a) $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2xy - 2z + 3, (x_0, y_0, z_0) = (-1, 2, -2)$

(b) $F(x, y, z) = \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 1, (x_0, y_0, z_0) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6})$

(c) $F(x, y, z) = e^z + x^2y + z + 5, (x_0, y_0, z_0) = (1, -6, 0)$

3. Ukažte, že zadanou množinu M lze na okolí daného bodu a popsat jako graf funkce f . Spočítejte její (parc.) derivace prvního a druhého řádu v příslušném bodu.

(a) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0\}$ v okolí b. $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

(b) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \log \sqrt{x^2 + y^2} = \arctg \frac{y}{x}\}$ v okolí b. $(1, 0)$, kde $f(1) = 0$

(c) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \sin z + y \cos z - e^z = 0\}$ v okolí b. $(2, 1, 0)$, kde $f(2, 1) = 0$. Napište rovnici její tečny v b. $(2, 1, 0)$.

Co to je **lokální / globální extrém funkce** $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ ($G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená)? Jaké jsou nutné podmínky pro to, aby fce měla v bodě a extrém? Co to jsou stacionární body?

4. Najděte všechny lokální extrémy následujících funkcí:

(a) $f(x, y) = x^2 + |\arctg y| - x^8$

(b) $f(x, y) = (|x| + |y|)^2 - (|x| + |y|)^4$

(d) $f(x, y) = xy \log(x^2 + y^2)$

Domácí úkol na 13.5.2015:

- (1) Je zadaná funkce $F(x, y)$ a dvě čísla x_0, y_0 taková, že $F(x_0, y_0) = 0$. Dokažte, že v nějakém okolí U bodu (x_0, y_0) existuje funkce $f = f(x)$ splňující podmínky $f(x_0) = y_0$ a $F(x, f(x)) = 0$ pro všechna $x \in U$. Určete $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$.

$$F(x, y) = x \sin y - \cos y + \cos 2y, \quad (x_0, y_0) = (1, 0) \quad [1 \text{ bod}]$$

- (2) Najděte všechny lokální extrémy funkce f :

$$f(x, y) = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad [2 \text{ body}]$$

Řešení:

1a. $f'(6) = \frac{4}{3}, f''(6) = \frac{25}{27}$

1b. $f'(0) = f''(0) = 0$

1c. $f'(0) = 0, f''(0) = f'''(0) = -\frac{2}{3}$

2a. $\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 2) = -\frac{1}{5}, \frac{\partial f}{\partial y}(-1, 2) = -\frac{3}{5}$

2c. $\frac{\partial f}{\partial x}(1, -6) = 6, \frac{\partial f}{\partial y}(1, -6) = -\frac{1}{2}$

3a. $f'(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 0, f''(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{23}{4}(?)$

3b. $f'(1) = 1, f''(1) = 2$

3c. $T(x, y) = 0 \cdot (x - 2) - 1 \cdot (y - 1) = 1 - y$

4a. ostré lok. min. v b. $(0, 0)$, v b. $(\pm \sqrt[6]{\frac{1}{4}}, 0)$ není lok. extrém

4b. ostré lok. min. v b. $(0, 0)$; neostré lok. max. na mn. $\{(x, y) \in R^2; |x| + |y| = \frac{1}{\sqrt{2}}\}$

4d. ostré lok. min. v b. $(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}})$ a $(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}})$, ostré lok. max. v b. $(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}})$ a $(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}})$, v b. $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$ není extrém

Dú 1. $f'(1) = 0 = f''(1)$

Dú 2. vnitřek: ostré lok. max. v b. $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ a $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, ostré lok. min. v b. $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ a $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, v počátku není extrém; hranice: lok. min. v bodech $\{(x, y) \in R^2; xy > 0, x^2 + y^2 = 1\}$, lok. maximum v b. $\{(x, y) \in R^2; xy < 0, x^2 + y^2 = 1\}$, sedlový bod v bodech $\{(x, y) \in R^2; xy = 0, x^2 + y^2 = 1\}$