

8. Cvičení z MA II. (9.4.2015)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Spojítost. Jak se definuje spojitá funkce (různé definice)?

1. Ukažte, že polynomy více proměnných jsou spojitě funkce $P : R^n \rightarrow R$.

2. Zkoumejte následující funkce na $(R^n, \text{eukleid. metrika})$ – určete definiční obor (jde o ot. či uz. množinu?), spojitost, vrstevnice. Nabývají tyto funkce na svém definičním oboru globálního maxima a minima?

$$(a) \quad f(x, y) = \sqrt{\log(x - y)} \quad (b) \quad f(x, y) = \log(\sqrt{y + 1} - x)$$

$$(c) \quad f(x, y) = \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{y^2}{x^2} - 1} \quad (d) \quad f(x, y, z) = \sqrt{\frac{z^2}{x^2 + y^2} - 1}$$

$$(e) \quad f(x, y) = x^2 - y^2 \quad (f) \quad f(x, y) = \frac{x}{y}$$

$$(g) \quad f(x, y) = \arcsin xy \quad (h) \quad f(x, y) = \arcsin \frac{y}{x+1}$$

3. Jsou následující fce spojitě? Nabývají na R^2 své největší a nejmenší hodnoty? Jaké?

$$(a) \quad f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0], \quad f(0, 0) = 0$$

$$(b) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0], \quad f(0, 0) = 0$$

4. Lze následující funkce spojitě rozšířit na R^2 ?

$$(a) \quad f(x, y) = (x + y)^2 \sin \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

$$(b) \quad f(x, y) = \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(c) \quad f(x, y) = \frac{\sin xy}{x^2 + y^2}$$

Parciální derivace. Necht $f : G \subset R^n \rightarrow R$, G je otevřená, $a \in G$ a $e^i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$ je i -tý vektor kanonické báze R^n . *Parciální derivací fce f podle i -té proměnné v bodě a* rozumíme číslo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te^i) - f(a)}{t}$$

(pokud tato limita existuje).

Značení: $C^1(G)$... množina fcí, které mají pro každý bod $a \in G$ spojitě parc.

derivace podle všech proměnných (tj. fce $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ jsou spojité jako fce n proměnných).

5. Určete definiční obor následujících funkcí na R^n , vyšetřete jejich spojitost a vypočtěte parciální derivace všude, kde existují:

(a) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ (b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2} + 1$

(c) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$ pro $[x, y] \neq 0$, $f(0, 0) = 0$

(d) $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ pro $[x, y] \neq 0$, $f(0, 0) = 0$

6. Určete definiční obor následujících funkcí a vypočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu všude, kde existují. Nalezněte rovnici tečné nadroviny v zadaných bodech:

(a) $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$, v bodě $[e, 1, 2, e^2]$

(b) $f(x, y) = \arctg \frac{x-y}{x+y}$, v bodě $[1, 1, f(1, 1)]$

Domácí úkol na 15.4.2015: U příkladů (1) a (2) vyšetřete spojitost. Lze dané funkce spojitě dodefinovat na R^2 ?

(1) $f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$

(2) $f(x, y) = \frac{\sin x + \sin y}{x + y}$

(3) Ukažte, že je-li funkce f spojitá na R^n , potom množina $M = \{x \in R^n; f(x) < 0\}$ je otevřená.

Řešení:**2a-h.** spojité na svých definičních oborech**3a.** není spojitá v b. $[0, 0]$, omezená **3b.** spojitá, není omezená**4a.** spojitá pro $f([0, 0]) := 0$ **4b.** spojitá pro $f([0, 0]) := 0$ **4c.** nelze spojitě definovat v b. $[0, 0]$ **5a.** spojitá na R^2

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{y \cdot \operatorname{sgn}(xy)}{\sqrt{|xy|}} \text{ pro } x \neq 0, y \neq 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{x \cdot \operatorname{sgn}(xy)}{\sqrt{|xy|}} \cdot \text{ pro } x \neq 0, y \neq 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) \text{ neex. pro } y \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = 0 \text{ pro } y \neq 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 0 \text{ pro } x \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) \text{ neex. pro } x \neq 0$$

5b. spojitá na R^2

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2+4y^2}} \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0],$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{8y}{\sqrt{x^2+4y^2}} \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0],$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \text{ neex.}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \text{ neex.}$$

5c. spojitá na R^2

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0],$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0],$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

5d. spojitá na R^2

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0],$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0],$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

$$\mathbf{6a.} \quad T(x, y, z) = e^2 + 2e(x - e) - 2e^2(y - 1) + e^2(z - 2), \quad D_f : x \cdot y > 0$$

$$\mathbf{6b.} \quad 2z - x + y = 0, \quad D_f : x \neq -y$$

Dů 1. není spojitá v b. $[0, 0]$, omezená**Dů 2.** spojitá pro $f([a, -a]) := \cos a \quad \forall a \in R$