# 1. Cvičení z MA II. (19.2.2015)

### Aplikace průběhů funkcí

Jak se pomocí derivace pozná, kde má funkce maximum/minimum? Kde je rostoucí/klesající?

**1.** Který z obdélníků o obvodu $l$ má největší obsah?

**2.** Který z válců o objemu $V$ má nejmenší povrch?

**3.** Z čtvercového listu papíru odstřihneme v rozích malé čtverce a složíme krabičku (bez víka). Jak velké čtverce máme odstřihnout, aby vzniklá krabička měla co největší objem?

**4.** Z chodby o šířce $A$ odbočuje chodba o šířce $B$. S jak dlouhou tyčí je moǏno zatočit? (Pro jednoduchost: tyč chceme nést vodorovně.)

**5.** Dokažte a zapamatujte si následující nerovnosti.

(a) Pro všechna $x \in R$ platí $e^x \geq 1 + x$.

(b) Pro všechna $x \in (-1, \infty)$ platí $\ln(1 + x) \leq x$.

(c) Pro všechna $x \in (-1, \infty)$ platí $1 + x \geq e^{\frac{x}{1+x}}$.

(Ekvivalentně: $\ln(1 + x) \geq \frac{x}{1+x}$ )

(d) Pro všechna $x \geq 0$ platí $\sin x \leq x$.

### Domácí úkol na 25.2.2015:

**1.** Jak velký sněhulák (ze tří koulí) lze vyrobit z koule o poloměru 1 metr? [1 bod]

Tip – Jensenova nerovnost:
Pro konvexní funkci $f$ na $\langle a, b\rangle$ a čísla $x_i \in \langle a, b\rangle$ a $\alpha_i$ taková, že $\alpha_i \in \langle 0, 1\rangle$, $\sum_i \alpha_i = 1$ platí, že

$$f(\sum_i \alpha_i x_i) \leq \sum_i \alpha_i f(x_i)\,.$$

**2.** Dokažte, že funkce $(1 + 1/x)^x$ je rostoucí ($x \in R^+$). [1 bod]

**3.** Pomocí Taylorova polynomu spočtěte následující limitu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$

[1 bod]

Začneme s integrály!!

**Řešení:**

**1.** $T_5^{\mathrm{tg},0}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$

**3a.** $\sum_{n=0}^{N/2} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{-x^{2n}}{n!}$

**3b.** $\sum_{n=0}^{N-1} \frac{2^n x^{n+1}}{n!}$, pro $x \in R$

**3c.** $\sum_{n=0}^{N} 0 \cdot x^n = 0$ nekonverguje k $f(x), x \neq 0$

**3d.** $\sum_{n=0}^{(N-1)/2} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$, na $(-3, 3)$

**3e.** $2 \cdot \sum_{n=0}^{(N-1)/2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pro $|x| < 1$

**3f.** $\sum_{n=0}^{N} (n+1)x^n$, na $(-1, 1)$

**3g.** $\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

**4.** $y(x) = (1 - x) \sum_{k=0}^{\infty} x^{(4k)}$

**7.** 0.099 833, 0.995 004, 0.989 949, 12.002 3, 1.010 050, 0.182 321, 0.693 147, 1.002 466, 1.051 010