11. cvičení z MA II. (30.4.2015)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Tečná nadrovina. Nechť $G \subset R^n$ otevřená, $a \in G$, $f \in C^1(G)$. *Tečnou nadrovinou ke grafu funkce f v bodě* $[a, f(a)]$ rozumíme graf fce T, $x \in R^n$:

$$T : x \mapsto f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n)$$

1. Anuloid $A = (x^2 + y^2 + z^2 + 12)^2 - 64(x^2 + y^2) = 0$ popište jako sjednocení grafů dvou fcí dvou proměnných. Existuje k tomuto anuloidu tečná rovina v bodě $[0, 3, \sqrt{3}]$?

2. Nechť $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y - 4$.
Určete tečnu T, která je kolmá k přímce $\{[t, t, t] \in R^3; t \in R\}$. Ve kterém bodě protíná T přímku $\{(0, 0, t) \in R^3; t \in R\}$?

Řetízkové pravidlo.
3. Derivujte podle všech proměnných (derivace složených funkcí – řetízkové pravidlo):

(a) funkci $t \to u$, kde $u = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$

(b) funkci $t \to z$, kde $z = \arcsin(x - y)$, $x = 3t$, $y = 4t^3$

(c) funkci $(r, \varphi) \to z$, kde $z = x^2y - xy^2$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

(d) Nechť funkce $(u, v, w) \to f(u, v, w)$ má spoj. parc. der. 2. řádu na R^3. Spočítejte parc. der. 2. řádu funkce $p(x, y, z) = f(x, xy, xyz)$.

Domácí úkol na 9.5.2015
1. Buď dána funkce

$$f(x, y) = \arccos \frac{x}{x + y}$$

a) Najděte definiční obor D funkce f a načrtněte jej.
b) Určete gradient funkce $\nabla f(x, y)$ v bodě $[1, 1]$.
c) Je funkce f v tomto bodě diferencovatelná? Pokud ano, napište její totální diferenciál v tomto bodě.
d) Aproximujte f pomocí diferenciálu v bodě [1,04; 0,99].

2. Zjistěte, zda lze následující funkci $f(x, y)$ dodefinovat tak, aby měla ve všech bodech R^2 totální diferenciál:

$f(x, y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2}$

3. Vypočtěte totální diferenciál funkce $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$.

Řešení:

geometrie

1. $z = \frac{y}{\sqrt{3}}$, $\quad D_f : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 36$, spojitost na D_f, ex. parc. der. na okolí b. $[0, 3]$, jsou spoj. v b. $[0, 3]$

2. tečna $z = f(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}) - (x - \frac{2}{3}) - (y - \frac{5}{2})$, protíná x v b. $[0, 0, ?\frac{17}{2}]$

$y = 0,\ x^2 + y^2 = 1\}$