

2. Cvičení z MA II. (19.2.2015)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Taylorův polynom

Co je Taylorův polynom funkce f v zadaném bodě a (značení $T_n^{f,a}$)?
Jak je tento polynom charakterizován (pro $x \rightarrow a$)?

1. Najděte Taylorův polynom (řádu např. 5 v bodě a) pro následující funkce:

- (a) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $a = 0$
- (b) $f(x) = e^x$
- (c) $f(x) = \log(1+x)$
- (d) $f(x) = \sin x$
- (e) $f(x) = \cos x$
- (f) $f(x) = (1+x)^2$

2. Najděte Taylorův polynom řádu n v bodě 0 pro následujících funkce. Konverguje tento polynom k zadané funkci (tj. pro $n \rightarrow \infty$)? Pro jaká x ?

- (a) $f(x) = e^{-x^2}$
- (b) $f(x) = xe^{2x}$
- (c) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$
- (d) $f(x) = \frac{x}{9+x^2}$
- (e) $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$
- (f) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$
- (g) $f(x) = \log 2$ odhadněte polynomem
(použijte např. fci $\log(1+x)$ nebo fci $-\log(1-x)$)

3. Pomocí Taylorova polynomu spočtěte následující limity:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5})$
- (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}))$.

4. Spočtěte přibližně (můžete bez odhadu chyby) následující čísla: $\sin 0.1$, $\cos 0.1$, $\sqrt{0.98}$, $\sqrt[3]{1279.03}$, $e^{0.01}$, $\log 2$, $\sqrt[12]{1.03}$, 1.01^5 , ...

Řešení:

1. $T_5^{\text{tg},0}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$

2a. $\sum_{n=0}^{N/2} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^N \frac{-x^{2n}}{n!}$

2b. $\sum_{n=0}^{N-1} \frac{2^n x^{n+1}}{n!}$, pro $x \in R$

2c. $\sum_{n=0}^N 0 \cdot x^n = 0$ nekonverguje k $f(x)$, $x \neq 0$

2d. $\sum_{n=0}^{(N-1)/2} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$, na $(-3, 3)$

2e. $2 \cdot \sum_{n=0}^{(N-1)/2} \frac{x^{2n+1}}{2^{n+1}}$ pro $|x| < 1$

2f. $\sum_{n=0}^N (n+1)x^n$, na $(-1, 1)$

2g. $\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

3. $y(x) = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} x^{(4k)}$

4. 0.099 833, 0.995 004, 0.989 949, 12.002 3, 1.010 050, 0.182 321, 0.693 147, 1.002 466, 1.051 010