

## 12. cvičení z MA II. (10. 5. 2013)

### Věta o implicitních funkcích.

1. Je zadaná funkce  $F(x, y)$  a dvě čísla  $x_0, y_0$  taková, že  $F(x_0, y_0) = 0$ . Dokažte, že v nějakém okolí  $U$  bodu  $(x_0, y_0)$  existuje funkce  $f = f(x)$  splňující podmínky  $f(x_0) = y_0$  a  $F(x, f(x)) = 0$  pro všechna  $x \in U$ . Určete  $f'(x_0)$  a  $f''(x_0)$ .

(a)  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4, (x_0, y_0) = (6, 2)$

(b)  $F(x, y) = x \sin y - \cos y + \cos 2y, (x_0, y_0) = (1, 0)$

(c)  $F(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1, (x_0, y_0) = (0, 1)$

2. Funkce  $f = f(x, y)$  je dána implicitně rovnicí  $F(x, y, z) = 0$  a podmínkou  $f(x_0, y_0) = z_0$ . Určete derivace  $f$  podle všech proměnných (a vypočítejte pro zadané body).

(a)  $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2xy - 2z + 3, (x_0, y_0, z_0) = (-1, 2, -2)$

(c)  $F(x, y, z) = e^z + x^2y + z + 5, (x_0, y_0, z_0) = (1, -6, 0)$

3. Ukažte, že zadanou množinu  $M$  lze na okolí daného bodu  $a$  popsat jako graf funkce  $f$ . Spočítejte její (parc.) derivace prvního a druhého řádu v příslušném bodu.

(a)  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0\}$  v okolí b.  $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

(b)  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \log \sqrt{x^2 + y^2} = \arctg \frac{y}{x}\}$  v okolí b.  $(1, 0)$ , kde  $f(1) = 0$

(c)  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \sin z + y \cos z - e^z = 0\}$  v okolí b.  $(2, 1, 0)$ , kde  $f(2, 1) = 0$ . Napište rovnici její tečny v b.  $(2, 1, 0)$ .

Co to je **lokální / globální extrém funkce**  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  ( $G \subset \mathbb{R}^n$  otevřená)? Jaké jsou nutné podmínky pro to, aby fce měla v bodě  $a$  extrém? Co to jsou stacionární body?

4. Najděte všechny lokální extrémy následujících funkcí:

(b)  $f(x, y) = (|x| + |y|)^2 - (|x| + |y|)^4$

(d)  $f(x, y) = xy \log(x^2 + y^2)$

**Domácí úkol na 17. 5. 2013:**

- (1) Funkce  $f = f(x, y)$  je dána implicitně rovnicí  $F(x, y, z) = 0$  a podmínkou  $f(x_0, y_0) = z_0$ . Určete derivace  $f$  podle všech proměnných (a vypočítejte pro zadané body)

$$F(x, y, z) = \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 1, \quad (x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$$

- (2) Najděte všechny lokální extrémy funkce  $f(x, y) = x^2 + |\operatorname{arctg} y| - x^8$

- (3) Najděte všechny lokální extrémy funkce  $f(x, y) = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

**Řešení:**

**1a.**  $f'(6) = \frac{4}{3}, f''(6) = \frac{25}{27}$

**1b.**  $f'(0) = f''(0) = 0$

**1c.**  $f'(0) = 0, f''(0) = f'''(0) = -\frac{2}{3}$

**2a.**  $\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 2) = -\frac{1}{5}, \frac{\partial f}{\partial y}(-1, 2) = -\frac{3}{5}$

**2c.**  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, -6) = 6, \frac{\partial f}{\partial y}(1, -6) = -\frac{1}{2}$

**3a.**  $f'(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 0, f''(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{23}{4}(?)$

**3b.**  $f'(1) = 1, f''(1) = 2$

**3c.**  $T(x, y) = 0 \cdot (x - 2) - 1 \cdot (y - 1) = 1 - y$

**4b.** ostré lok. min. v b.  $(0, 0)$ ; neostré lok. max. na mn.  $\{(x, y) \in R^2; |x| + |y| = \frac{1}{\sqrt{2}}\}$

**4d.** ostré lok. min. v b.  $(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}})$  a  $(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}})$ , ostré lok. max. v b.  $(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}})$  a  $(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}})$ , v b.  $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$  není extrém

**Dú 1.**  $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}) = -1, \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}) = 0$

**Dú 2.** ostré lok. min. v b.  $(0, 0)$ , v b.  $(\pm \sqrt[6]{\frac{1}{4}}, 0)$  není lok. extrém

**Dú 3.** vnitřek: ostré lok. max. v b.  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$  a  $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ , ostré lok. min. v b.  $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$  a  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ , v počátku není extrém; hranice: lok. min. v bodech  $\{(x, y) \in R^2; xy > 0, x^2 + y^2 = 1\}$ , lok. maximum v b.  $\{(x, y) \in R^2; xy < 0, x^2 + y^2 = 1\}$ , sedlový bod v bodech  $\{(x, y) \in R^2; xy = 0, x^2 + y^2 = 1\}$