

### 3. Cvičení z MA I. (17. 10. 2012)

Co je to supremum, infimum, maximum, minimum? Příklad množiny, která má supremum, ale ne maximum; příklad množiny bez suprema.

1. Najděte suprema a infima následujících množin v  $R$  (pokud existují); existují pro ně maxima a minima?

$$(a) A_1 = \{-\frac{1}{n}; n \in N\} \quad (b) A_2 = \{\frac{n+(-1)^n}{n}; n \in N\}$$

$$(c) A_3 = \{n^{(-1)^n}; n \in N\} \quad (d) A_4 = \{q < \sqrt{3}; q \in Q\}$$

Co je to posloupnost, monotónní posloupnost? Jaká je definice limity pro posloupnosti; nevlastní limita?

2. Rozhodněte, zda jsou následující posloupnosti monotónní.

$$(a) \{2n + (-1)^n\}_{n=1}^{\infty} \quad (b) \{\frac{1}{1+n^2}\}_{n=1}^{\infty}$$

$$(c) \{\frac{n+1}{n+2}\}_{n=1}^{\infty} \quad (d) \{\frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n-2}}\}_{n=1}^{\infty}$$

3. Spočítejte přímo podle definice limitu posloupnosti  $\{\frac{1}{1+n^2}\}_{n=1}^{\infty}$

4. Spočítejte následující limity (nebo dokažte, že neexistují):

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(-1)^n \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n!} \quad (d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+5n}{-n^2+4n} \quad (f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n+5^n+10^n}{-2^{n+1}+5^{n+1}+10^{n+1}}$$

$$(g) \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^2(n\pi/4) \quad (h) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin n^2$$

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+5} - \sqrt{n-1} \quad (j) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}$$

$$(k) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \quad (l) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sqrt{n}|}{\sqrt{n}}$$

$$(m) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+4n+n \sin n}{n \cos 3n+(2n+\sin n)^2} \quad (n) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2} - \sqrt[2]{n^3+1}}$$

**Dů:** Najděte (pokud existují) supremum a infimum množiny  $B \subset R$ ,  $B = \{\sin x \cos x; x \in R\}$ ; existuje pro ni maximum a minimum? (1 bod)

**Dů:** Spočítejte přímo podle definice limitu posloupnosti  $\{\frac{n+1}{n+2}\}_{n=1}^{\infty}$  (1 bod)

**Dů:** Spočítejte limitu posloupnosti  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)^{20}(3n+2)^{30}}{(2n+1)^{50}}$  (1 bod)

**Řešení:**

1a.  $\sup A_1 = 0, \inf A_1 = -1 = \min, \max$  neex.

1b.  $\sup A_2 = \frac{3}{2} = \max, \inf A_2 = 0 = \min$

1c.  $\sup A_3$  neex.,  $\inf A_3 = 0, \min$  neex.

1d.  $\sup A_4 = \sqrt{3}, \inf, \max, \min$  neex.

2a. nekles.    2b. kles.    2c. rost.    2d. kles. (tady byla chyba)

3a. 0

4a. neex.    4b.  $\cos 1$     4c. 1    4d. 0    4e. -3    4f.  $\frac{1}{10}$     4g. neex.    4h. 0    4i. 0    4j.

0    4k.  $\frac{1}{2}$     4l. 1    4m.  $\frac{1}{2}$     4n. 0