

10. Cvičení z MA I. (5. 12. 2012)

Co je to funkce? Jak se definuje limita funkce v bodě? Kdy je funkce spojitá?

1. Dokažte, že funkce f je na intervalu I rostoucí, právě když platí

$$\forall x, y \in I, x \neq y : \frac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0$$

2. Je-li f neklesající na $(-\infty, a)$ a nerostoucí na $\langle a, +\infty)$ pro nějaké $a \in R$, pak f nabývá maxima.

3. Nechť f nabývá minima v $a \in R$. Musí existovat $\epsilon > 0$ takové, že f je nerostoucí na $(a - \epsilon, a)$ a neklesající na $\langle a, a + \epsilon)$?

4. Které z následujících operací provedených na neklesající funkce f, g dává opět neklesající funkci?

$$(a) \quad f + g \quad (b) \quad f - g \quad (c) \quad \max\{f, g\} \quad (d) \quad \min\{f, g\} \quad (e) \quad f \circ g$$

5. Spočítejte limity nebo dokažte, že neexistují.

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}, \text{ pokud } a = 0, 1, +\infty, -\infty \\ [1 \text{ pro } a = 0; 2/3 \text{ pro } a = 1; 1/2 \text{ pro } a = + - \infty]$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} \quad \left[\frac{1}{2}\right] \quad (c) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}} \quad \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{10}\right]$$

$$(d) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^3-x^2-x+1} \quad [neex.] \quad (e) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} \quad \left[\frac{3}{2}\right]$$

$$(f) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} \quad (n \in N) \quad \left[\frac{1}{n}\right] \quad (g) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m-1}{x^n-1} \quad (m, n \in N) \quad \left[\frac{m}{n}\right]$$

$$(h) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+x^2+\dots+x^n-n}{x-1} \quad \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right] \quad (i) \quad \lim_{x \rightarrow 1} (\lfloor x \rfloor - x) \quad [neex.]$$

$$(j) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \quad [1] \quad (k) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} \quad \left[\frac{1}{2}mn(n-m)\right]$$

$$(l) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[x]{x}-1} \quad (m, n \in N) \quad \left[\frac{n}{m}\right]$$

Dů. Spočítejte limity nebo dokažte, že neexistují.

$$(m) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \sqrt{(x+a)(x+b)} - x \right\} \quad (a, b \in R) \quad \left[\frac{1}{2}(a+b)\right]$$

$$(n) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_k)} - x \right\} \quad (a_i \in R) \quad \left[\frac{1}{k} \sum a_i\right]$$

$$(o) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - \sqrt[n]{1+bx}}{x} \quad (n, m \in N, \quad a, b \in R) \quad \left[\frac{na-mb}{mn}\right]$$