1. Cvičení z MA I. (3.10. 2012)

M. Lopatková

`http://ufal.mff.cuni.cz/~lopatkova`

Co je relace, zobrazení, funkce? Vlastnosti relace. Absolutní hodnota udává "vzdálenost" (vlastnosti vzdálenosti). Jak jinak lze měřit vzdálenost?

1. Řešte nerovnice v R:

(a) $\frac{x-2}{2x-8} \geq 1$ (b) $\frac{x+3}{x-1} \geq \frac{x+1}{x-5}$ (c) $|5x-2| < x$

(d) $\frac{|x+1|}{x-1} \geq x$ (e) $||x-2|+1| \leq 5$ (f) $|x^2-4x+3| \leq |x^2-4|$

(g) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x+3) \geq 0$ (h) $\cos^2 x > sin^2 x$

2. Ukažte, že pro všechna $a, b \in R$ platí:

(a) $|a+b| \leq |a| + |b|$

(b) $||a| - |b|| \leq |a-b|$

(c) $|a-b| \leq |a-c| + |c-b|$

3. AG nerovnost: Pro kladná reálná $x_1, \ldots x_n$ platí:

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$$

Dokažte pro $n = 2$.

4. Nakreslete grafy funkcí:

(a) $||||x|-1|-1|-1|$, $||x-1|^2-1|$, $||x-1|-1|^2$

(b) $\cos x$, $\cos(x+\pi)$, $\cos(2x+\pi)$, $\sin|x|$, $|\sin x|$

(c) $\sin x^2$, $\sin\frac{1}{x}$, $\ln\sin x$, $\ln\ln\sin x$

5. Ukažte, že každý celočíselný obnos větší nebo roven 8 lze vyplatit pětikorunami a tříkorunami.

6. Rozhodněte o pravdivosti a negujte:

(a) $\forall x \in N \quad \exists y \in N \quad \forall z \in N$ platí: $z > x \Rightarrow y < z$

(b) $\exists y \in N \quad \forall x \in N \quad \forall z \in N$ platí: $z > x \Rightarrow y < z$

(c) $\exists y \in N \quad \forall x \in N \quad \forall z \in R$ platí: $z > x \Rightarrow y < z$

7. Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

(a) $A \Rightarrow B,\ \neg B \Rightarrow \neg A,\ \neg(A \& \neg B),\ \neg A \vee B$

(b) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C,\ A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

8. Který z následujících výroků je silnější?

(a) $\forall x \in R \quad \exists K > 0\ ,\ K \in R$ takové, že $|f(x+1) - f(x)| \le K$

(b) $\exists K > 0\ ,\ K \in R \quad \forall x \in R$ takové, že $|f(x+1) - f(x)| \le K$

9. Mějme zobrazení $f : X \to Y$ a množiny $A, B \subset X$. Jaké musí mít f, A, B vlastnosti, aby platily následující vztahy?

(a) $\forall A \quad f^{-1}(f(A)) = A$

(b) $\forall A \quad f(f^{-1}(A)) = A$

(c) $\forall A, B \quad f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$

(d) $\forall A, B \quad f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$

(e) $\forall A, B \quad f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$

(f) $\forall A, B \quad f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$

Domácí úkol: Dokažte, že pro $\forall x \in R,\ \forall y \in R,\ \forall n \in N$ platí (z axiomů pro reálná čísla)

(a) $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$

(b) $-x = (-1) \cdot x$

(c) $(x \cdot y = 0) \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$

(d) $(0 \le x < y) \Rightarrow x^n < y^n$

Řešení:

1a. $(4;6\rangle$ 1b. $\langle -\infty;-7\rangle \cup (1,5)$ 1c. $(1/3;1/2)$ 1d. $\langle -\infty;1-\sqrt{2}\rangle \cup (1;1+\sqrt{2}\rangle$ 1e. $\langle -2;6\rangle$ 1f. $\langle 1-\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{7}{4}\rangle \cup \langle 1+\frac{\sqrt{6}}{2};+\infty)$ 1g. $\langle 1;2\rangle$ 1h. $\bigcup_{k\in Z}\langle -\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\rangle$