

7. Cvičení z MA I. (14.11.2012)

1. Spočítejte následující limity:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor^3}{n - \lfloor \sqrt{n+9} \rfloor} \quad & \text{(b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i}{n} \cdot \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^n \quad (i \text{ je imaginární číslo}) \\ \text{(c)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}) \quad & \text{(d)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{\sqrt{n^7} + \sqrt[3]{n^7}} - \sqrt[3]{\sqrt{n^7} - \sqrt[3]{n^7}} \right) \\ \text{(e)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \quad & \text{(f)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + \dots + n^3}{n^4} \end{aligned}$$

2. Dokažte, že následující rekurentně zadaná posloupnost $\{a_n\}$ má limitu a spočítejte ji:

$$a_1 = \sqrt{c} \quad (c > 0, c \in \mathbb{R}), \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}$$

3. Určete limity v závislosti na $k, l \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k - (n-1)^l}{n^k + n^l}$$

Dů 1. Zjistěte, pro která reálná čísla x je následující posloupnost monotonní:

$$\left\{ \left(\frac{x^3}{3x-2} \right)^n \right\}$$

Dů 2. Určete limity v závislosti na $k, l \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k + (-n)^l}{(n-1)^k - n^l}$$

Dů 3. Spočítejte:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$$

Řešení:

1a. 2 1b. 0 1c. 0 1d. $\frac{2}{3}$ 1e. neex. 1f. $\frac{1}{4}$

3. 1 pro $k > l$, -1 pro $k < l$, 0 pro $k = l$

Dú 1. konst. pro $x \in \{-2, 0, 1\}$, rost. pro $x \in (-\infty; -2) \cup (\frac{2}{3}; 1) \cup (1; +\infty)$,
kles. pro $x \in (-2; 0)$

Dú 2. 1 pro $k > l$, $(-1)^{1+l}$ pro $k < l$, $-\infty$ pro $k = l$ sudé, -1 pro $k = l$
liché

Dú 3. $\frac{1}{2}$