

2. Cvičení z MA I. (10. 10. 2012)

M. Lopatková

<http://ufal.mff.cuni.cz/~lopatkova>

Jak probíhá důkaz matematickou indukcí?

1. Dokažte, že pro všechna přirozená n platí:

- (a) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ (b) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
(c) $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ($= \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2$)
(d) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$ pro $n \geq 2$ (e) Vypočítejte pro $x \in \mathbb{R}$: $\sum_{k=1}^n x^k$

2. Dokažte pomocí matematické indukce, že pro všechna přirozená n a reálná $x > -1$ platí tzv. **Bernoulliho nerovnost**:

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

3. Dokažte tzv. de Morganova pravidla pro množiny A a B_i ($i = 1 \dots n$):

- (a) $A \setminus \bigcap_{i=1}^n B_i = \bigcup_{i=1}^n (A \setminus B_i)$
(b) $A \setminus \bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcap_{i=1}^n (A \setminus B_i)$

4. Dokažte pro všechna přirozená n :

- (a) $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$ (b) $n^2 \leq 2^n$

5. Dokažte pro všechna přirozená n a reálná x taková, že $0 \leq x_k \leq \pi$:

$$|\sin(\sum_{k=1}^n x_k)| \leq \sum_{k=1}^n \sin x_k$$

Dů (2b.): Dokažte pro všechna přirozená n , kde e je základ přirozeného logaritmu:

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

(Nápověda: pro horní odhad lze užít AG nerovnost; dále platí $(1 + \frac{1}{n})^n \leq e$)

Bonus: Dokažte AG nerovnost pro všechna $x_i \in \mathbb{R}, x_i \geq 0$ a $n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Co je to supremum, infimum, maximum, minimum? Příklad množiny, která má supremum, ale ne maximum; příklad množiny bez suprema.

Dů (1b): Najděte suprema a infima následujících množin v R (pokud existují); existují pro ně maxima a minima?

$$(a) A_1 = \{-\frac{1}{n}; n \in N\} \quad (b) A_2 = \{\frac{n+(-1)^n}{n}; n \in N\}$$

$$(c) A_3 = \{n^{(-1)^n}; n \in N\} \quad (d) A_4 = \{q < \sqrt{3}; q \in Q\}$$

$$(e) A_5 = \{\sin x \cos x; x \in R\}$$