4. Cvičení z MA II. (16. a 17. 3. 11)

Určete primitivní funkce k následujícím funkcím:

1. Spočítejte primitivní funkce:

(a) $\int x^n \ln x \; dx$ (b) $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \; dx$ (c) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} \; dx$

(d) $\int \sin x \cdot \sqrt{2 + \cos x} \; dx$ (e) $\int \frac{e^{5x}-1}{e^{2x}} \; dx$ (f) $\int x \cdot \sqrt{x^2+1} \; dx$

(g) $\int x \cdot \sqrt{2 - 3x^2} \; dx$ (h) $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} \; dx$ (i) $\int \frac{1}{x^2-1} \; dx$

(j) $\int \frac{5x}{2x+3} \; dx$ (k) $\int \sin x \cos 2x \; dx$ (l) $\int \sin x \sin 2x \; dx$

2. Příklady na substituci II:

(a) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} \; dx$ (b) $\int \frac{1}{x+2\sqrt{x}+2} \; dx$

(c) $\int \frac{x-1}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})} \; dx$

3. Důležité příklady:

(a) $\int \frac{1}{\sin x} \; dx$ (na $(0, \pi)$, např. užijte substituci tg $\frac{x}{2} = t$)

(b) $\int \frac{1}{1+3\sin^2 x} \; dx$ (na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, užijte např. substituci tg $x = t$)

(c) $\int \frac{1}{x+(\sqrt{x^2+x+1})} \; dx$ (Nápověda: zkuste substituci $\sqrt{x^2+x+1} = x+t$)

4. A další příklady na určování primitivní funkce:

(a) $\int \frac{x^{17}-5}{x-1} dx$ (b) $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x} dx$ (c) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx$

(d) $\int \frac{1}{e^{2x}+e^x-2}$ (e) $\int \cos^2 x \; dx$ (f) $\int \log(x + \sqrt{1+x^2}) \; dx$

(g) $\int \frac{1+\mathrm{tg}^2 \mathrm{x}}{1+\mathrm{tgx}} \; dx$ (h) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x(1-\cos x)} \; dx$

Domácí úkol na 23., resp. 24. 3. 2011:
Příklady 4a), 4f), 4h) viz výše.
Zopakovat/naučit se/pochopit, jak fungují standardní substituce $t = \mathrm{tg}\ \frac{x}{2}$, $t = \mathrm{tg}$ x a eulerovu substituci $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x+t$ nebo $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt+\sqrt{c}$, (pokud ax^2+bx+c nemá R kořeny a $a > 0, c > 0$).

Řešení: (až na c)
2a. $2\sqrt{x} - 2\log|1+\sqrt{x}|$ na $(0,+\infty)$
2b. $\log(x+\sqrt{x}+2) - 2\mathrm{arctg}(\sqrt{\mathrm{x}}+1)$ na $(0,+\infty)$
2c. $3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\log\sqrt[6]{x} + 6\frac{1}{\sqrt[6]{x}} - 3\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2\frac{1}{\sqrt{x}}$ na R

3a. $\log \mathrm{tg}\ \frac{x}{2} \equiv \frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$, na $(0,\pi)$
3b. $\frac{1}{2}$ arctg $(2\ .\ \mathrm{tg}x)$, na $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$
3c. $\sqrt{x^2+x+1} - x + 2\log|\sqrt{x^2+x+1} - x - 2| - \frac{1}{2}\log|2\sqrt{x^2+x+1} - 2x - 1|$, na $(-\infty,-1)$ a na $(-1,\infty)$

4a. $\sum_1^{17}\frac{x^k}{k} - 4\log|x-1|$, na $(-\infty,1)$ a na $(1,\infty)$
4b. $\frac{-10\cdot 5^{-x}\log 2 + 2^{-x}\log 5}{5\log 5\log 2}$, na R
4c. $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x$, na R
4d. $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\log|e^x - 1| + \frac{1}{6}\log(e^x+2)$, na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$
4e. $\frac{1}{2}(\sin x\cos x + x)$, na R
4f. $x\log(x+\sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1}$, na R
4g. $\ln|1+\ \mathrm{tg}\ x|$ na $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, -\frac{\pi}{4}+k\pi)$ a na $(-\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$
4h. $-\frac{1}{4}\log(1+\cos x) - \frac{3}{4}\log(1-\cos x) + \frac{1}{2(\cos x - 1)}$ na $(k\pi,(k+1)\pi)$
$= -\frac{3}{2}\log|t| - \frac{1}{4t^2} + \log|1+t^2|$, kde $t = \mathrm{tg}\ \frac{x}{2}$