## 11. cvičení z MA II. (11. a 12. 5.2011)

**Věta o implicitních funkcích.**

**1.** Je zadaná funkce $F(x,y)$ a dvě čísla $x_0, y_0$ taková, že $F(x_0,y_0)=0$. Dokažte, že v nějakém okolí $U$ bodu $(x_0,y_0)$ existuje funkce $f=f(x)$ splňující podmínky $f(x_0)=y_0$ a $F(x,f(x))=0$ pro všechna $x\in U$. Určete $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$.

(a) $F(x,y)=x^2+y^2-4x-10y+4,\ \ (x_0,y_0)=(6,2)$

(b) $F(x,y)=x\sin y-\cos y+\cos 2y,\ \ (x_0,y_0)=(1,0)$

(c) $F(x,y)=x^2-xy+2y^2+x-y-1,\ \ (x_0,y_0)=(0,1)$

**2.** Funkce $f=f(x,y)$ je dána implicitně rovnicí $F(x,y,z)=0$ a podmínkou $f(x_0,y_0)=z_0$. Určete derivace $f$ podle všech proměnných (a vypočítejte pro zadané body).

(a) $F(x,y,z)=x^2+2y^2-3z^2+2xy-2z+3,\ \ (x_0,y_0,z_0)=(-1,2,-2)$

(b) $F(x,y,z)=\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z-1,\ \ (x_0,y_0,z_0)=(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6})$

(c) $F(x,y,z)=e^z+x^2y+z+5,\ \ (x_0,y_0,z_0)=(1,-6,0)$

**3.** Ukažte, že zadanou množinu $M$ lze na okolí daného bodu $a$ popsat jako graf funkce $f$. Spočtěte její (parc.) derivace prvního a druhého řádu v příslušném bodu.

(a) $M=\{(x,y)\in R^2;\ (x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)=0\}$ v okolí b. $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$

(b) $M=\{(x,y)\in R^2;\ \log\sqrt{x^2+y^2}=\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\}$ v okolí b. $(1,0)$, kde $f(1)=0$

(c) $M=\{(x,y,z)\in R^3;\ x\sin z+y\cos z-e^z=0\}$ v okolí b. $(2,1,0)$, kde $f(2,1)=0$. Napište rovnici její tečny v b. $(2,1,0)$.

Co to je **lokální / globální extrém funkce** $f: G\to R$ ($G\subset R^n$ otevřená)? Jaké jsou nutné podmínky pro to, aby fce měla v bodě $a$ extrém? Co to jsou stacionární body?

**4.** Najděte všechny lokální extrémy následujících funkcí:

(a) $f(x,y)=x^2+|\operatorname{arctg} y|-x^8$

(b) $f(x,y)=(|x|+|y|)^2-(|x|+|y|)^4$

(c) $f(x,y) = xy\sqrt{1-x^2-y^2}$

(d) $f(x,y) = xy\log(x^2+y^2)$

**Domácí úkol na 20. 5.:**
Příklady 2b, 4a, 4c (výše).

**Řešení:**

**1a.** $f'(6) = \frac{4}{3},\ f''(6) = \frac{25}{27}$
**1b.** $f'(0) = f''(0) = 0$
**1c.** $f'(0) = 0,\ f''(0) = f'''(0) = -\frac{2}{3}$

**2a.** $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,2) = -\frac{1}{5},\ \frac{\partial f}{\partial y}(-1,2) = -\frac{3}{5}$
**2b.** $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}) = -1,\ \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}) = 0$
**2c.** $\frac{\partial f}{\partial x}(1,-6) = 6,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,-6) = -\frac{1}{2}$

**3a.** $f'(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 0\ ,\ f''(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{23}{4}(?)$
**3b.** $f'(1) = 1\ ,\ f''(1) = 2$
**3c.** $T(x,y) = 0 \cdot (x-2) - 1 \cdot (y-1) = 1 - y$

**4a.** ostré lok. min. v b. $(0,0)$, v b. $(\pm\sqrt[6]{\frac{1}{4}},0)$ není lok. extrém
**4b.** ostré lok. min. v b. $(0,0)$; neostré lok. max. na mn. $\{(x,y) \in R^2; |x| + |y| = \frac{1}{\sqrt{2}}\}$
**4c.** vnitřek: ostré lok. max. v b. $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$ a $(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})$, ostré lok. min. v b. $(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$ a $(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})$, v počátku není extrém; hranice: lok. min. v bodech $\{(x,y) \in R^2; xy > 0,\ x^2 + y^2 = 1\}$, lok. maximum v b. $\{(x,y) \in R^2; xy < 0,\ x^2 + y^2 = 1\}$, sedlový bod v bodech $\{(x,y) \in R^2; xy = 0,\ x^2 + y^2 = 1\}$
**4d.** ostré lok. min. v b. $(\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}})$ a $(-\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}})$, ostré lok. max. v b. $(\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}})$ a $(-\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}})$, v b. $(\pm 1,0)$, $(0,\pm 1)$ není extrém