10. Cvičení z MA II. (4. a 5. 5. 2011)

Co to je (totální) diferenciál funkce $f : G \to R$ ($G \subset R^n$ otevřená) v bodě $a \in G$ (značíme $Df(a)$)?
Jak souvisí totální diferenciál s parciálními derivacemi?

1. Ověřte podle definice, že lineární funkce $L(h_1, h_2) = 2(h_1+h_2)$ je diferenciálem funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ v bodě $(1, 1)$.

2. Dodefinujte funkci $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2+y^2}$ na R^2 tak, aby měla totální diferenciál ve všech bodech a spočtěte ho.

3. Vyšetřete, zda lze funkci $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2} \log(1 + xy)$ dodefinovat v nějakém okolí počátku tak, aby v něm měla diferenciál.

Co to je směrová derivace? Jak souvisí totální diferenciál s derivacemi ve směru?

4. Vypočtěte derivace následujících funkcí f v zadaných směrech h v zadaných bodech a:

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ ve směru $h = (-1, 1, 1)$ v bodě $a = (1, 2, -1)$ (Jak byste postupovali, pokud byste chtěli využít pouze definice směrové derivace?)

(b) $f(x, y) = \operatorname{arctg} xy$ ve směru $h = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ v bodě $a = (1, 1)$

(c) $f(x, y) = e^{x-y^2}$ ve směrech $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, 1)$ v bodě $(0, 0)$

(d) $f(x, y, z) = \sin(xyz)$ ve směru $(2, 1, 1)$ v bodě $(1, 1, 0)$

(e) Určete směrové derivace funkce $f(x, y, z) = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3}$ v bodě $(0, 0, 0)$. Rozhodněte, zda v tomto bodě existuje diferenciál.

5. Vypočtěte totální diferenciál následujících funkcí f:

(a) $f(x, y) = \frac{x}{y}$ (b) $f(x, y) = e^{xy}$ (c) $f(x, y, z) = xy + yz + xz$

6. Ukažte, že pro malá x a y platí:

(a) $\operatorname{arctg} \frac{x+y}{1+xy} \approx x + y$ (b) $(1 + x)^m (1 + y)^n \approx 1 + mx + ny$

(c) $\ln(1 + x) \ln(1 + y) \approx xy$

Domácí úkol na 11. a 12. 5.

1. Buď dána funkce
$$f(x,y) = \log(x+y^2)$$
(a) Najděte definiční obor D funkce f a načrtněte jej.
(b) Vypočítejte gradient funkce $\nabla f(x,y)$ v bodě $[0,1]$.
(c) Je funkce f v bodě $[1,1]$ diferencovatelná? Pokud ano, napište její totální diferenciál v tomto bodě.
(d) Aproximujte hodnotu funkce f v bodě $[0,04; 0,99]$ pomocí totálního diferenciálu $D_{f(0,1)}$.
(e) Napište rovnici tečné roviny a normály ke grafu f v bodě $[1,1,0]$.

2. Příklad 4a (viz výš).

3. Příklad 5a (viz výš).

Konvence (v technických textech):
Nechť $h = (h_1, \dots h_n) \in R^n$ a x_i jsou projekce na i-tou souřadnici (tj. $x_i(h) = h_i$). Projekce jsou lineární (proč?), proto diferenciál dx_i je roven x_i (zde píšeme dx_i místo Dx_i v j. bodě). Diferenciál je též projekcí na i-tou souřadnici: $dx_i(h) = x_i(h) = h_i$. Tedy

$$df(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1(h) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n(h)$$

Píšeme tedy:
$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)dx_n$$
$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$