1. Cvičení z MA II. (23.,24.2.2011)

Aplikace průběhů funkcí

1. Jak se pomocí derivace pozná, kde má funkce maximum/minimum? Kde je rostoucí/klesající?

(a) Který z obdélníků o obvodu l má největší obsah?

(b) Který z válců o objemu V má nejmenší povrch?

(c) Z čtvercového listu papíru odstřihneme v rozích malé čtverce a složíme krabičku (bez víka). Jak velké čtverce máme odstřihnout, aby vzniklá krabička měla co největší objem?

(d) Jak velký sněhulák (ze tří koulí) lze vyrobit z koule o poloměru 1 metr? Tip: použijte Jensenovu nerovnost: pro konvexní funkci f a čísla α_i, x_i taková, že $\alpha_i \geq 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$ platí, že

$$f(\sum_i \alpha_i x_i) \leq \sum_i \alpha_i f(x_i)\,.$$

(e) Z chodby o šířce A odbočuje chodba o šířce B. S jak dlouhou tyčí je mo\v{l}no zatočit? (Pro jednoduchost: tyč chceme nést vodorovně.)

Taylorův polynom

Co je Taylorův polynom funkce f v zadaném bodě a (značení $T_n^{f,a}$)?
Jak je tento polynom charakterizován (pro $x \to a$)?

2. Najděte Taylorův polynom řádu 5 v bodě 0 pro funkci tg .

3. Najděte Taylorův polynom řádu n v bodě 0 pro následujících funkce. Konverguje tento polynom k zadané funkci (tj. pro $n \to \infty$)? Pro jaká x?

(a) $f(x) = e^{-x^2}$

(b) $f(x) = xe^{2x}$

(c) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$

(d) $f(x) = \frac{x}{9+x^2}$

(e) $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$

(f) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

(g) $f(x) = \log 2$ odhadněte polynomem
(použijte např. fci $\log(1+x)$ nebo fci $-\log(1-x)$)

4. Rozveďte následující funkci v řadu:

$$y(x) = \frac{1}{1 + x + x^2 + x^3}$$

5. Pomocí Taylorova polynomu spočtěte následující limity:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

(c) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}\right)$ (d) $\lim_{x\to+\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$.

6. Použitím Taylorova polynomu spočtěte přibližně $\sqrt{2}$ (a další dle libosti) a odhadněte chybu. Čili určete interval (a, b) co nejmenší délky, v němž dané čislo leží.

7. Spočtěte přibližně (můžete bez odhadu chyby) následující čísla: $\sin 0.1$, $\cos 0.1$, $\sqrt{0.98}$, $\sqrt[3]{1279.03}$, $e^{0.01}$, $\log 1.2$, $\log 2$, $\sqrt[12]{1.03}$, 1.01^5, ...

Domácí úkol na 2., resp. 3.3.2011: Příklad 5a, 6 a jeden z příkladů ze 7 (viz výš); zopakovat odhady chyb u aproximace pomocí Taylorova polynomu.

Řešení:

1. $T_5^{\mathrm{tg},0}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$

3a. $\sum_{n=0}^{N/2}(-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{-x^{2n}}{n!}$

3b. $\sum_{n=0}^{N-1} \frac{2^n x^{n+1}}{n!}$, pro $x \in R$

3c. $\sum_{n=0}^{N} 0 \cdot x^n = 0$ nekonverguje k $f(x), x \neq 0$

3d. $\sum_{n=0}^{(N-1)/2}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$, na $(-3, 3)$

3e. $2 \cdot \sum_{n=0}^{(N-1)/2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pro $|x| < 1$

3f. $\sum_{n=0}^{N}(n+1)x^n$, na $(-1, 1)$

3g. $\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

4. $y(x) = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} x^{(4k)}$

5a. $-\frac{1}{12}$

6. $1.414\,213$

7. $0.099\,833$, $0.995\,004$, $0.989\,949$, $12.002\,3$, $1.010\,050$, $0.182\,321$, $0.693\,147$, $1.002\,466$, $1.051\,010$