9. Cvičení z MA II. (27. a 28. 4. 2011)

1. Druhé parciální derivace se mohou lišit v závislosti na pořadí derivací:

$f(x,y) = xy$ pro $|x| \geq |y|$ a $f(x,y) = 0$ pro $|x| < |y|$

2. Derivujte podle všech proměnných (derivace složených funkcí – řetízkové pravidlo):

(a) funkci $t \to u$, kde $u = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$

(b) funkci $t \to z$, kde $z = \arcsin(x-y)$, $x = 3t$, $y = 4t^3$

(c) funkci $(r,\varphi) \to z$, kde $z = x^2y - xy^2$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

(d) Nechť funkce $(u,v,w) \to f(u,v,w)$ má spoj. parc. der. 2. řádu na R^3. Spočítejte parc. der. 2. řádu funkce $p(x,y,z) = f(x,xy,xyz)$.

Nechť $G \subset R^n$ otevřená, $a \in G$, $f \in C^1(G)$. *Tečnou nadrovinou ke grafu funkce f v bodě* $[a, f(a)]$ rozumíme graf fce T, $x \in R^n$:

$$T : x \mapsto f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n)$$

3. Anuloid $A = (x^2 + y^2 + z^2 + 12)^2 - 64(x^2 + y^2) = 0$ popište jako sjednocení grafů dvou fcí dvou proměnných. Existuje k tomuto anuloidu tečná rovina v bodě $[0, 3, \sqrt{3}]$?

4. Nechť $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y - 4$.
Určete tečnu T, která je kolmá k přímce $\{[t,t,t] \in R^3; t \in R\}$. Ve kterém bodě protíná T přímku $\{(0,0,t) \in R^3; t \in R\}$?

Domácí úkol na 4. a 5. 5.:

(a) Určete definiční obor následující funkce, vyšetřete jejich spojitost a vypočctěte parciální derivace všude, kde existují
$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pro $[x,y] \neq 0$, $f(0,0) = 0$ (př. 5d z cvič. 8)

(b) Určete definiční obor následujících funkcí a vypočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu všude, kde existují. Nalezněte rovnici tečné nadroviny v zadaných bodech:
$f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{x+y}$, v bodě $[1, 1, f(1,1)]$ (př. 6b z cvič. 8)

(c) Spočítejte hodnoty parc. der. 1. a 2. řádu funkce
$F(x,y) = g(xy, \frac{x}{y})$ v bodě $A = (3,2)$.

Řešení:

3. $z = \frac{y}{\sqrt{3}}$,

$D_f : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 36$, spojitost na D_f, ex. parc. der. na okolí b. $[0, 3]$, jsou spoj. v b. $[0, 3]$

4.

tečna $z = f(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}) - (x - \frac{2}{3}) - (y - \frac{5}{2})$, protíná x v b. $[0, 0, ?\frac{17}{2}]$