3. Cvičení z MA II. (9. a 10. 3. 2011)

Co je metoda substituce pro hledání primitivní funkce (2 pravidla)?
Určete primitivní funkce k následujícím funkcím:

1. Substituce:

(a) $\int \sqrt[3]{1-3x}\ dx$ (b) $\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\ dx$

(c) $\int \frac{x}{\sqrt{2+5x^2}}\ dx$ (d) $\int \frac{\log^2 x}{x}\ dx$

(e) $\int \sqrt{1-x^2}\ dx$ (f) $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}}\ dx$

(g) $\int xe^{-x^2}\ dx$ (h) $\int \mathrm{tg} x\ dx$

(i) $\int \mathrm{cotg}\ dx$ (j) $\int \frac{1}{\sqrt{8+6x-9x^2}}\ dx$

(k) $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\ dx$ (l) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\ dx$

2. Per partes:

(a) $\int (x^2-x)\exp(x) dx$ (b) $\int x \sin x dx$

(c) $\int e^x(\sin x+\cos x) dx$ (d) $\int \sqrt{x}\log^2 x dx$

(e) $\int \log|1+x| dx$ (f) $\int 5^x \sin x dx$

(g) $\int \sin^7 x \cos x dx$ (h) $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$

(i) $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$

3. Rozklad na parciální zlomky - určete primitivní funkce

(a) $f(x) = \frac{x^2+2x}{x+3}\ dx$ (b) $f(x) = \frac{3x+4}{x^2+3x+5}\ dx$

(c) $f(x) = \frac{1}{(3x+1)(x-1)}\ dx$ (d) $f(x) = \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\ dx$

(e) $f(x) = \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}\ dx$ (f) $f(x) = \frac{2x}{(x+1)(x^4+2x^2+1)}\ dx$

(g) $f(x) = \frac{8+6x-2x^2}{x^4-4x+3}\ dx$ (h) $f(x) = \frac{x}{(x^2+2x+2)^2(x^2+2x-3)}\ dx$

4. Najděte primitivní funkci na maximálním intervalu existence

(a) $\int \arcsin \sin \frac{4x}{x^2+1}\ dx$

(b) $\int \frac{1}{x+(\sqrt{x^2+x+1})}\ dx$ (Nápověda: zkuste substituci $\sqrt{x^2+x+1} = x+t$)

tipy pro substituce:

- 'mocnina' ... $t = ax^k + b$ $(dt = akx^{(k-1)}dx)$
- goniometrické ...$R = \frac{P}{Q}$, kde P, Q polynomy

  $t = \sin x$, pokud $R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, -\cos)$, tj. 'lichá wrt $\cos x$'

  $t = \cos x$, pokud $R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos)$, tj. 'lichá wrt $\sin x$'

  $t = \mathrm{tg}\ x$, pokud $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos)$, tj. 'sudá wrt $\sin x, \cos x$'

  $t = \mathrm{tg}\ \frac{x}{2}$, univerzální, ale nepříjemná
- odmocnina ...

  $t = \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, pro $R(x, \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}), q \in N, ad - bc \neq 0, a, b, c, d \in R$

  $t = \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, pro $\sqrt[q_1]{S^{p_1}}, ... \sqrt[q_n]{S^{p_n}}$; $S = (\frac{ax+b}{cx+d})$; $s = NSN(q_1, ...q_n)$
- eulerova ... $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t$ nebo $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$,

  pokud $ax^2 + bx + c$ nemá R kořeny a $a > 0, c > 0$

Domácí úkol na 16., resp. 17. 3. 2011:

Příklady 1l), 2e) a 4a), viz výše.

Zopakovat/naučit se/pochopit metodu per partes, obě substituční metody a výpočet primitivní funkce pro racionální lomené funkce.

Řešení: (až na konstantu c)

1a. $-\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}$, na R
1b. $-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}$, na R
1c. $\frac{1}{5}\cdot\sqrt{2+5x^2}$, na R
1d. $\frac{1}{3}\log^3 x$, na $(0,+\infty)$
1e. $\frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2})$, na $(-1,1)$
1f. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{2}$, na $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$
1g. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$, na R
1h. $-\log|\cos x|$, na každém $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi), k\in Z$
1i. $\log|\sin x|$, na každém $(k\pi,(k+1)\pi), k\in Z$
1j. $\frac{1}{3}\cdot\arcsin(x-\frac{1}{3})$, na $(-\frac{2}{3},\frac{4}{3})$
1k. $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}$, na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$
1l. $\frac{1}{2}$ $\operatorname{arctg}(2\sin^2 x-1) = -\frac{1}{2}$ $\operatorname{arctg}(2\cos^2 x-1)$, na R
1m. $3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+6\log\sqrt[6]{x}+6\frac{1}{\sqrt[6]{x}}-3\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+2\frac{1}{\sqrt{x}}$ na R

2a. $(x^2-3x+3)\exp x$, na R
2b. $\sin x - x\cos x$, na R
2c. $e^x\sin x$, na R
2d. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}(\log^2 x-\frac{4}{3}\log x+\frac{8}{9})$, na $(0,+\infty)$
2e. $x\log|1+x|-x+\log|1+x|$, na $(-\infty,-1)$ a na $(-1,\infty)$
2f. $\frac{5^x}{1+\log^2 5}(\log 5\cdot\sin x-\cos x)$, na R
2g. $\frac{1}{8}\sin^8 x$, na R
2h. $\frac{1}{2}(\frac{x}{1+x^2}+\operatorname{arctg} x)$, na R
2i. $I_{n+1}=\frac{x}{2n(1+x^2)^n}+\frac{2n-1}{2n}I_n$, pro $n\in N$ na R

3a. $\frac{x^2}{2}-x+3\ln|x+3|$, na $(-\infty,-3)$ a na $(-3,\infty)$
3b. $\frac{3}{2}\ln(x^2+3x+5)-\frac{1}{\sqrt{11}}$ arctg $\frac{1}{\sqrt{11}}(2x+3)$, na R
3c. $F(x)=\frac{1}{4}\log|\frac{x-1}{3x+1}|$, na $(-\infty,-\frac{1}{3})$ a na $(-\frac{1}{3},1)$ a na $(1,\infty)$
3d. $\log|x-2|+\log|x+5|$ na $(-\infty,-5)$ a na $(-5,2)$ a na $(2,\infty)$
3e. $\frac{1}{2}(x+1)^2+\log|x-1|-\frac{1}{2}\log(x^2+1)-$ arctg x na $(-\infty,1)$ a na $(1,\infty)$
3f. $F(x)=-\frac{1}{2}\log|x+1|+\frac{1}{4}\log(x^2+1)+\frac{1}{2}\frac{x-1}{x^2+1}$, na $(-\infty,-1)$ a na $(-1,\infty)$
3g.
3h. $F(x) = -\frac{1}{50}\log(x^2+2x+2)+\frac{1}{10}\frac{x+2}{x^2+2x+2}+\frac{1}{100}\log|x-1|+\frac{3}{100}\log|x+3|+\frac{7}{50}\operatorname{arctg}(x+1)$, na $(-\infty,-3)$, na $(-3,1)$ a na $(1,\infty)$
4a. $2\log(x^2+1)$ na zákl. intervalu $\langle\frac{-4+\sqrt{16-\pi^2}}{\pi},\frac{4-\sqrt{16-\pi^2}}{\pi}\rangle$,
$-2\log|x^2+1|-\pi x$ na zákl. intervalu $\langle\frac{4-\sqrt{16-\pi^2}}{\pi},\frac{4+\sqrt{16-\pi^2}}{\pi}\rangle$; nutno "poslepovat"