1. a 2. cvičení z MA III. (29. a 30.9. a 6. a 7. 10.09)

Co je to metrický prostor? Jaké má vlastnosti metrika? K čemu metriky?

1. Ukažte, že následující předpisy definují metriky:

(a) $R: \quad \rho(x,y) = |x-y|$

(b) $R^n, n \in N$: (manhattanská) $\quad \rho_1(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$

(c) $R^n, n \in N$: (eukleidovská) $\quad \rho_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$

(Tip: Cauchyho nerovnost: $(\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2)$)

(d) Zobecnění: $\rho_p(x,y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p} \quad (p \geq 1),\ p \in R$

(e) $R^n, n \in N$: $\quad \rho_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i|; 1 \leq i \leq n\} \quad (p \to \infty)$

(f) Méně názorná metrika:
$P \neq 0: \ \rho(x,y) = 1$, pokud $x \neq y$, $\rho(x,y) = 0$, pokud $x = y$

2. Ukažte, že platí:

(a) Ukažte ekvivalenci metrik (b), (c) a (d) z cvičení 1.
(postač. podm.: $\rho_i, \rho_j : \exists r, s : 0 < r \leq s$ takové, že pro $\forall x, y$ platí:
$r.\rho_i(x,y) \leq \rho_j(x,y) \leq s.\rho_i(x,y)$)
(b) Jak vypadá jednotková koule v R^n s metrikami (b), (c) a (d) z cvičení 1?
(c) Nezápornost metriky plyne z trojúhelníkové nerovnosti a z axiomu $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ pro $\forall x, y$.

Jak se definuje otevřená, uzavřená množina? Co jsou limitní a izolované body? Co je hranice, uzávěr, vnitřek množiny?

3. Platí následující tvrzení? Dokažte.

(a) Koule $B(a,r) = \{x \in M; \rho(a,x) < r\}$ je otevřená množina metrického prostoru (M, ρ).
(b) Koule $\bar{B}(a,r) = \{x \in M; \rho(a,x) \leq r\}$ je uzavřená množina metrického prostoru (M, ρ).
(c) Jednobodové množiny jsou uzavřené množiny metrického prostoru (M, ρ).
(d) Každá konečná množina v R^n je uzavřená. Platí to pro obecný metrický prostor?
(e) Jak vypadají otevřené množiny v metrickém prostoru (M, ρ), jehož každý bod je izolovaný (jako bod množiny M)?
(f) Bod množiny X v metrickém prostoru (M, ρ) je limitním bodem X, právě když není izolovaným bodem X.

(g) Bod mimo množinu X je limitním bodem X, právě když je hraničním bodem X.

4. Zkoumejte následující množiny v R^n (otevřenost, uzavřenost, vnitřek, hranice, uzávěr):

(a) Mějme metrický prostor (N, ρ'), kde $N = (0,1) \cup (2,3\rangle$, ρ' metrika indukovaná z eukleid. prostoru R.
Zkoumejte množiny $X_1 = (0,1)$, $X_2 = (2,3)$ v (N, ρ').

V následujících příkladech uvažujeme množiny X v eukleid. prostoru (R^n, ρ_2):

(b) $\{[x,y] \in R^2;\ y > x^2,\ x^2 + y^2 < 2\}$

(c) $\{[x,y] \in R^2;\ y \geq x^2\} \cup \{[0,-1]\}$

(d) $\{[x,y] \in R^2;\ 1 \leq x < 2,\ 1 \leq y < 2\}$

(e) $\{[x,y] \in R^2;\ |\frac{y-1}{x}| \leq 1\}$

(f) $\{[\frac{1}{n}, \frac{1}{m}] \in R^2;\ n, m \in N\}$

(g) $\{[x,y] \in R^2;\ \frac{4-4x^2-y^2}{4y} \geq 0\}$

(h) $\{[3\cos t + \cos 3t, 3\sin t - \sin 3t] \in R^2;\ t \in [0, 2\pi]\}$

(i) $\{[x,y,z] \in R^3;\ 1 < x^3 + y^3 + z^3 \leq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$

5. Zkoumejte následující množinu M – je tato množina otevřená či uzavřená?

(a) $\forall k:\ M_k = \{[x,y] \in R^2;\ x^2 + y^2 < (1 + \frac{1}{k})^2\}$
Určete množinu $M = \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k$. Je tato množina otevřená či uzavřená?

(b) $\forall k:\ M_k = \{[x,y] \in R^2;\ x^2 + y^2 \leq (1 - \frac{1}{k})^2\}\}$
Určete množinu $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$. Je tato množina otevřená či uzavřená?

6. Rozhodněte, zda jsou následující množity omezené:

(a) $\{[x,y] \in R^3;\ 2 \leq xyz \leq 4\}$

(b) $\{[x,y] \in R^3;\ x + y + z = 5\ ,\ xy + yz + xz = 8\}$
(c) $\{[x,y] \in R^2;\ x^3 + y^3 - 2xy = 0\ ,\ x \geq 0\ ,\ y \geq 0\}$
tip: příslušný kvadrant lze vyjádřit jako $\{[r\cdot\cos\alpha, r\cdot\sin\alpha];\ r \geq 0,\ \alpha \in \langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle\}$

Řešení:

4a. X_1 otevřená i uzavřená, Int $X_1 = X_1$, vnější body Ext $X_1 = (2,3\rangle$, hranice Hr $X_1 = \emptyset$; X_2 otevřená, ne uzavřená, Int $X_2 = X_2$, vnější body Ext $X_2 = (0,1)$, hranice Hr $X_2 = \{3\}$

4b. X otevřená, Hr $X = \{[x,y]\ ;\ x^2 = y\ ,\ -1 \leq x \leq 1\} \cup \{[x,y]\ ;\ x^2 + y^2 = 2\ ,\ -1 \leq x \leq 1\}$, uzávěr $\bar{X} = \{[x,y] \in R^2;\ y \geq x^2,\ x^2 + y^2 \leq 2\}$, omezená

4c. X uzavřená, Hr $X = \{[x,y]\ ;\ x^2 = y\ ,\ x \in R\} \cup \{[-1,0]\}$, $\bar{X} = X$, Int $X = \{[x,y]\ ;\ x^2 < y\ ,\ x \in R\}$, neomezená

4d. X není ot., není uz., Hr $X = \{[x,1]\ ;\ 1 \leq x \leq 2\} \cup \{[x,2]\ ;\ 1 \leq x \leq 2\} \cup \{[1,y]\ ;\ 1 \leq y \leq 2\} \cup \{[2,y]\ ;\ 1 \leq y \leq 2\}$, $\bar{X} = \{[x,y] \in R^2;\ 1 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 2\}$, Int $X = \{[x,y] \in R^2;\ 1 < x < 2,\ 1 < y < 2\}$, omezená

4e. X není ot., není uz., Hr $X = \{[x,y]\ ;\ y = -x+1\} \cup \{[x,y]\ ;\ y = x+1\}$, $\bar{X} = X \cup \{[0,1]\}$, Int $X = \{[x,y] \in R^2;\ |\frac{y-1}{x}| < 1\}$, není omezená

4f. X není ot., není uz., Hr $X = X \cup \{[0, \frac{1}{m}]\} \cup \{[\frac{1}{n}, 0]\} \cup \{[0,0]\}$, $\bar{X} = $ Hr X, Int $X = \emptyset$, omezená

4g. X není ot., není uz., Hr $X = \{[x,y] \in R^2;\ \frac{4-4x^2-y^2}{4y} = 0 \cup \{[x,0]\}$, $\bar{X} = X \cup \{[x,0]\}$, Int $X = \{[x,y] \in R^2;\ \frac{4-4x^2-y^2}{4y} > 0\}$, není omezená

4h. X uzavřená (uz. křivka), Hr $X = X = \bar{X}$, Int $X = \emptyset$, omezená

4i. X není ot., není uz., Hr X ... místo některé z nerovností platí rovnost, $\bar{X} = \{[x,y,z] \in R^3;\ 1 \leq x^3 + y^3 + z^3 \leq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$, Int $X = \{[x,y,z] \in R^3;\ 1 < x^3 + y^3 + z^3 < 2,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$, omezená

5a. M uzavřená,

5b. M otevřená

6a. X není omezená, např. $[n, \frac{1}{n}, 2]$,

6b. X omezená, $X \subset B([0,0,0], \sqrt{3})$,

6c. X omezená, obraz kompakt. intervalu při spojitém zobrazení