3. cvičení z MA III. (13. a 14. 10. 09)

1. Prostor funkcí $C\langle a,b\rangle$ (spoj. fce na uz. intervalu) ... ukažte, že následující předpisy mají smysl a definují metriku:

(a) $f,g \in C\langle a,b\rangle :\quad \rho_{\max}(f,g) = \max_{x\in<a,b>} |f(x)-g(x)|$

(b) $f,g \in C\langle a,b\rangle :\quad \rho_1(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)| \text{ dx}$

(c) $f,g \in C\langle a,b\rangle :\quad \rho_2(f,g) = \sqrt{\int_a^b |f(x)-g(x)|^2 \text{ dx}}$

(Tip: Hölderova ner.: $\int_a^b |fg| \text{ dx} \le \sqrt[p]{\int_a^b |f|^p \text{ dx}} \cdot \sqrt[q]{\int_a^b |g|^q \text{ dx}}$, kde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$)

Zobecnění: $\rho_p(f,g) = \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)-g(x)|^p \text{ dx}} \quad (p \ge 1)$

(d) Ukažte, že konvergence v metr. prostoru $(C\langle a,b\rangle, \rho_{\max})$ je stejnoměrná.
(e) Jak vypadá jednotková koule v metr. prostoru $(C\langle a,b\rangle, \rho_{\max})$?
(f) Rozmyslete si, že metriky $\rho_{\max}$ a ρ_1 nejsou ekvivalentní!

2. Prostor funkcí $R\langle a,b\rangle$ (riemannovsky integrovatelné fce):

(a) $f,g \in R\langle a,b\rangle :\quad \rho_1(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)| \text{ dx}$ není metrika – proč?

(b) Jak lze upravit, abychom dostali metrický prostor?

3. Prostor posloupností $\{x_n\}_{i=1}^{\infty}$, $x_i \in R$ ... ukažte, že následující předpisy mají smysl a definují metriku:

(a) prostor l_1 ... $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$ ... $x,y \in l_1 :\ \rho_1(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|$

(b) prostor l_2 ... $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$ ... $x,y \in l_2 :\ \rho_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2}$

(Tip: Minkowského ner.: $\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^p} \le \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} a_i^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} b_i^p}$
pro $a_i, b_i \ge 0, p \ge 1$)

Zobecnění:
prostor l_p ... $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$ ... $x,y \in l_p :\ \rho_p(x,y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p}$

(c) prostor l_∞ ... $\{x_n\}_{i=1}^{\infty}$ omez. posl. ...
$x,y \in l_\infty :\quad \rho_\infty(x,y) = \max_{i=1,\dots\infty} |x_i - y_i|$

4. Méně rozumné metriky

(a) $P \ne 0$ ... $x,y \in P$: $\rho(x,y) = 1$ pro $x \ne y$, $\rho(x,y) = 0$ pro $x = y$
Jak vypadá jednotková koule? Jak vypadá koule o poloměru r, $r \ge 1$?

(b) X ... prostor všech omezených posloupností reálných čísel ...

$$x = \{x_n\},\ y = \{y_n\} \in X : \quad \rho(x,y) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}$$

Ukažte, že ρ je metrika na X.

5. Metriky indukované normou.

(a) Co je to normovaný lineární prostor $(M, \|.\|)$ (nad R) ?

(b) $x, y \in M : \rho(x,y) := \|x - y\|$
Ukažte, že ρ je metrika na M.

6. Metriky a skalární součin.

(a) Co je to lineární prostor se skalárním součinem $(M, (x,y))$ (nad R) ?

(b) Pro $x \in M$ definujme $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$. (Ukažte, že je to norma.)

(c) Tedy na M lze definovat metriku $\rho := \sqrt{(x-y, x-y)}$, $\forall x, y \in M$.
Ukažte, že je to opravdu metrika.