6. cvičení z MA III. (3. a 11. 11. 09)

POZOR: V obecném metrickém prostoru není konvergence totožná s konvergencí po složkách – to platí např. v R^n, nikoli už v l_∞. Najděte protipříklad.

Definujte kompaktní metrický prostor / množinu a topologicky kompaktní metrický prostor / množinu. Jakými operacemi se zachovává kompaktnost? Charakterizujte kompaktní množiny v R^n. Co to je úplný metrický prostor?

1. Rozhodněte, zda jsou následující množiny kompaktní:

(a) $\{[x, z, y] \in R^3 |\ 2 \leq xzy \leq 4\}$

(b) $\{[x, z, y] \in R^3 |\ x + y + z = 5\ \&\ xy + yz + xz = 8\}$

2. Uzavřené a omezené množiny nemusí být v obecném metrickém prostoru kompaktní – najděte protipříklad v následujících prostorech:

(a) $(C\langle 0, 1\rangle, \rho_{max})$

(b) (l_∞, ρ_{max})

3. Dokažte, že kompaktní metrický prostor je úplný. obrácená implikace neplatí – uvedte protipříklad.

4. Dokažte, že podmnožina úplného metrického prostoru indukuje úplný podporostor, právě když je uzavřená.

5. Dokažte, že jsou-li metrické prostory (M_1, ρ_1) a $((M_1, \rho_1))$ kompaktní, je i součinový prostor s indukovanou metrikou (M, ρ) kompaktní.
(tj. $M = M_1 \times M_2$ a pro $x = (x_1, x_2) \in M, y = (y_1, y_2) \in M$ platí $\rho(x, y) = \sqrt{\rho_1(x_1, y_1)^2 + \rho_2(x_2, y_2)^2}$)