12. Cvičení z MA II. (5. a 6.1.10)

Co jsou to Fourierovy řady, jak se vypočítají jejich koeficienty? Kdy Fourierova řada konverguje bodově k dané funkci? Kdy Fourierova řada konverguje stenoměrně k dané funkci? Co je to trigonometrická řada?

1. Rozviňte následující funkce ve Fourierovy řady na intervalu $-\pi, \pi$:

(a) $f(x) = \sin^2 x$ (b) $f(x) = \cos^3 x$ (c) $f(x) = \sin^3 x$

2. Pro následující funkce najděte na daných intervalech trigonometrické řady, příp. výsledek aplikujte na dané x:

(a) $f(x) = x$ na $[-\pi, \pi)$; $x = \frac{\pi}{2}$ (b) $f(x) = x$ na $[0, 2\pi)$

(c) $f(x) = \frac{x}{2}$ na $[-\pi, \pi)$

(d) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $f(x) = 0$ na $[-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi]$; $x = \frac{\pi}{2}$

(e) $f(x) = x^2$ na $[-\pi, \pi)$; $x = 0$ (f) $f(x) = x^2$ na $[0, 2\pi)$; $x = 0$

(g) $f(x) = \sin ax$ na $[-\pi, \pi), a \in R \setminus Z$

(h) $f(x) = \exp ax$ na $[-\pi, \pi), a \neq 0$

(i) $f(x) = |x|$ na $[-\pi, \pi)$; $x = 0$

(j) $f(x) = |\cos x|$ na $[-\pi, \pi)$ (k) $f(x) = |\sin x|$ na $[-\pi, \pi)$

(l) $f(x) = 0$ na $[-\pi, 0)$, $f(x) = \sin x$ na $[0, \pi)$

Dú.

(a) Vyjádřete funkci $f(x) = \sin x$ na $[0, \pi)$ jako součet sinové řady.
(b) Vyjádřete funkci $f(x) = x(\pi - x)$ na $[0, \pi)$ jako součet sinové řady.
(c) Vyjádřete funkci $f(x) = x(\pi - x)$ na $[0, \pi)$ jako součet kosinové řady.

Řešení:

1a. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$, konv. všude k f **1b.** $\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$, konv. všude k $f; x = 0$

1c. $\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$, konv. všude k f

2a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot 2}{n} \cdot \sin nx$ na $[-\pi, \pi)$, bodová konv.; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

2b. $\pi - 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ na $[0, 2\pi)$, bodová konv.; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}$

2c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \sin nx$ na $[-\pi, \pi)$, bodová konv.

2d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}(1 - \cos\frac{\pi n}{2})/cdot \sin nx$, bodová konv.; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$

2e. $\frac{\pi^2}{3} + 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot \cos nx$, stejnoměrná konv.; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

2f. $\frac{4\pi^2}{3} + 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi \sin nx}{n})$, bodová konv.; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

2g. $\frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{a^2 - n^2} \cdot \sin \pi a \sin nx$, stejnoměrná konv.

2h.

2i. $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$, stejn. konv.; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

2j. $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} \cos 2nx$, stejn. konv.

2k. $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-4n^2} \cos 2nx$, stejn. konv.

2l. $\frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{1-4n^2}$, stejn. konv.

3a. rozšíříme na interval $(-\pi, \pi) : f(x) = |\sin x|$, viz výš 2k

3b. rozšíříme sudě na interval $(-\pi, \pi)$: $\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n^2}$, stejn. konv., $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

3c. rozšíříme liše na interval $(-\pi, \pi)$: $\frac{8}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$, stejn. konv.,