4.-6. Cvičení z MA III. (20.,21. a 27.10., 4.11. a 3., 11.11 09)

1. Zjistěte, čemu se rovná uzávěr následujících množin X:

(a) Q v R s metrikou indukovanou z obvyklé metriky na R

(b) N v R s metrikou indukovanou z obvyklé metriky na R

(c) $\{f \in C(\langle 0,1\rangle); f$ po částech lineární$\}$ v $C(\langle 0,1\rangle)$ se supremovou metrikou

(d) $\{f \in C(\langle 0,1\rangle); \forall x,\ y \in \langle 0,1\rangle : |f(x) - f(y)| \leq |x - y|\}$ v $C(\langle 0,1\rangle)$ se supremovou metrikou

2. Určete vzdálenost bodu $[-5,-1]$ od množin $M_1 = \{[x,y] \in R^2;\ y = x^2\}$ a $M_2 = \{[x,y] \in R^2;\ y > x^2\}$.
(vzdálenost: $\rho(a,M) := \inf\{\rho(a,x);\ x \in M\}$ pro $a \in R^n$, $M \subset R^n$)

Jak se definuje spojité zobrazení (různé definice)? Jak se chovají spojitá zobrazení k otevřeným / uzavřeným množinám? Jak se chovají spojitá zobrazení k aritmetickým operacím, ke skládání?

3. Zkoumejte spojitost následujících funkcí:

(a) Ukažte, že polynomy více proměnných jsou spojité funkce $P : R^n \to R$.
(b) Mějme (M,ρ) – ukažte, že metrika ρ je spojitá funkce na $M \times M$.
($\forall x, y \in M : x_n \to x,\ y_n \to y \Rightarrow \rho(x_n, y_n) \to \rho(x,y)$)

4. Zkoumejte následující funkce na (R^n, eukleid. metrika) – určete definiční obor (jde o ot. či uz. množinu?), spojitost, vrstevnice. Nabývají tyto funkce na svém definičním oboru globálního maxima a minima?

(a) $f(x,y) = \sqrt{\log(x-y)}$ (b) $f(x,y) = \log(\sqrt{y+1} - x)$

(c) $f(x,y) = \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{y^2}{x^2} - 1}$ (d) $f(x,y,z) = \sqrt{\frac{z^2}{x^2+y^2} - 1}$

(e) $f(x,y) = x^2 - y^2$ (f) $f(x,y) = \frac{x}{y}$

(g) $f(x,y) = \arcsin xy$ (h) $f(x,y) = \arcsin \frac{y}{x+1}$

5. Jsou následující fce spojité? Nabývají na R^2 své největší a nejmenší hodnoty? Jaké?

(a) $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ pro $[x,y] \neq [0,0]$, $f(0,0) = 0$

(b) $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ pro $[x,y] \neq [0,0]$, $f(0,0) = 0$

(c) $f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ pro $[x,y] \neq [0,0]$, $f(0,0) = 0$

6. Lze následující funkce spojitě rozšířit na R^2?

(a) $f(x,y) = (x+y)^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

(b) $f(x,y) = \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(c) $f(x,y) = \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$

(d) $f(x,y) = \frac{\sin x + \sin y}{x+y}$

7. Ukažte, že je-li funkce f spojitá na R^n, potom množina $M = \{x \in R^n; f(x) < 0\}$ je otevřená.

Řešení:

4a-h. spojité na svých definičních oborech

5a. není spojitá v b. $[0,0]$, omezená **5b.** spojitá, není omezená **5c.** není spojitá v b. $[0,0]$, omezená

6a. spojitá pro $f([0,0]) := 0$ **6b.** spojitá pro $f([0,0]) := 0$ **6c.** nelze spojitě dodefinovat v b. $[0,0]$ **6d.** spojitá pro $f([a,-a]) := \cos a \quad \forall a \in R$