

5. Cvičení z MA III. (31.10.07)

Nechť $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, G je otevřená, $a \in G$ a $e^i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$ je i -tý vektor kanonické báze \mathbb{R}^n . *Parciální derivací fce f podle i -té proměnné v bodě a rozumíme číslo*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te^i) - f(a)}{t}$$

(pokud tato limita existuje).

Značení: $C^1(G)$... množina fcí, které mají pro každý bod $a \in G$ spojitě parciální derivace podle všech proměnných (tj. fce $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ jsou spojitě jako fce n proměnných).

1. Určete definiční obor následujících funkcí na \mathbb{R}^n , vyšetřete jejich spojitost a vypočtěte parciální derivace všude, kde existují:

- (a) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ (b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2} + 1$
- (c) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$ pro $[x, y] \neq 0$, $f(0, 0) = 0$
- (d) $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ pro $[x, y] \neq 0$, $f(0, 0) = 0$

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $a \in G$, $f \in C^1(G)$. *Tečnou nadrovinou ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$ rozumíme graf fce T , $x \in \mathbb{R}^n$:*

$$T : x \mapsto f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n)$$

2. Určete definiční obor následujících funkcí a vypočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu všude, kde existují. Nalezněte rovnici tečné nadroviny v zadaných bodech:

- (a) $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$, v bodě $[e, 1, 2, e^2]$
- (b) $f(x, y) = \arctg \frac{x-y}{x+y}$, v bodě $[1, 1, f(1, 1)]$

3. Anuloid $A = (x^2 + y^2 + z^2 + 12)^2 - 64(x^2 + y^2) = 0$ popište jako sjednocení grafů dvou fcí dvou proměnných. Existuje k tomuto anuloidu tečná rovina v bodě $[0, 3, \sqrt{3}]$?

4. Nechť $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y - 4$. Určete tečnu T , která je kolmá k přímce $\{[t, t, t] \in \mathbb{R}^3; t \in \mathbb{R}\}$. Ve kterém bodě protíná T přímku $\{(0, 0, t) \in \mathbb{R}^3; t \in \mathbb{R}\}$?

Řešení:

1a. spojitá na R^2

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{y \cdot \text{sgn}(xy)}{\sqrt{|xy|}} \text{ pro } x \neq 0, y \neq 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{x \cdot \text{sgn}(xy)}{\sqrt{|xy|}} \text{ pro } x \neq 0, y \neq 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = 0 \text{ pro } y \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) \text{ neex. pro } y \neq 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) \text{ neex. pro } x \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = 0 \text{ pro } x \neq 0$$

1b. spojitá na R^2

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4y^2}} \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0],$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{8y}{\sqrt{x^2 + 4y^2}} \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0],$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \text{ neex.}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \text{ neex.}$$

1c. spojitá na R^2

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0],$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0],$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

1d. spojitá na R^2

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0],$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0],$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

2a. $T(x, y, z) = e^2 + 2e(x - e) - 2e^2(y - 1) + e^2(z - 2), \quad D_f : x \cdot y > 0$

2b. $2z - x + y = 0, \quad D_f : x \neq -y$

3. $z = \frac{y}{\sqrt{3}},$

$D_f : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 36$, spojitost na D_f , ex. parc. der. na okolí b. $[0, 3]$, jsou spoj. v b. $[0, 3]$

4.

tečna $z = f\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right) - \left(x - \frac{2}{3}\right) - \left(y - \frac{5}{3}\right)$, protíná x v b. $[0, 0, ? \frac{17}{2}]$