

11. Cvičení z MA I. (14.12.06)

Co je to derivace? Jaké znáte věty pro derivace, k čemu se využívá? Jak se počítá derivace – aritmetika derivací, derivace složené funkce, derivace inverzní funkce. Co je jednostranná derivace a jak se počítá?

1. Určete ve všech bodech definičního oboru funkcí, zda existují (jednostranné) derivace, případně čemu se rovnají. Lze tyto funkce spojitě rozšířit?

- (a) $\operatorname{sgn} x$ (b) $|x|$ (c) $\frac{1}{4} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}$ (d) $|\frac{x-1}{1-2x}|$ (e) $\frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$
(f) $\sqrt[3]{(1 - \exp(1 - x^2))^2}$ (g) $\sqrt{1 - \exp(-x^2)}$ (h) $(\sin x)^{|\cos x|}$

2. Najděte extrémy funkcí.

- (a) $x\sqrt{2-x^2}$ (b) $\sin^3 x + \cos^3 x$ (c) $\arccos\left(\frac{-x^2-x+2}{4}\right)$
(d) $|\frac{x}{1+x^2}|$ (e) $2\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

3. Vypočtěte derivace funkcí:

- (a) $f(x) = (x-a)^2(x-b)^2$ pro $x \in (a, b)$, $f(x) = \frac{1}{e}$ pro všechna ostatní x
(b) $g(x) = x^2 e^{-x^2}$ pro $|x| \leq 1$, $g(x) = \frac{1}{e}$ pro $|x| > 1$

4. Ještě další derivace:

- (a) $\arcsin |\frac{5x+2}{3x-6}|$ (b) $\sqrt{\sin x \cos x}$ (c) $\sqrt{\operatorname{arctg}(\ln^2 x)}$
(d) $\operatorname{argcosh} = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ ($x \geq 1$)
(hyperbolometrické funkce, tj. fce inverzní k fci $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$)

5. A ještě nějaké limity (viz také limity z minulé hodiny, příklady v bodu 3):

- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(-\frac{1}{x^2})}{x}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg}^2 x)^{\sin^2 x}$
(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$ (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$ (f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1 - \frac{2}{x})$
(g) $\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x} \ln \sqrt{x}$ (h) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{3x} - \frac{1}{\sin x})$ (i) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}$

Výsledky:

- 1a.** $x \in R - \{0\} : f'(x) = 0, f'(0) = +\infty$
1b. $x \in R - \{0\} : f'(x) = \operatorname{sgn} x, f'_+(0) = 1, f'_-(0) = -1$
1c. $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) : f'(x) = \frac{x}{x^4-1}$
1d. $x \in R - \{\frac{1}{2}, 1\} : f'(x) = \operatorname{sgn}(\frac{x-1}{1-2x}) \frac{-1}{(1-2x)^2}, f'_+(1) = 1, f'_-(1) = -1$
1e. $x \in (1, +\infty) : f'(x) = \frac{(\ln x)^x}{x \ln x} (\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x} \ln x)$; lze spoj. rozš. v 1: $\bar{f}(1) = 0, f'_+(1) = 0$
1f. $x \in R - \{-1, 1\} : f'(x) = \frac{4}{3} \frac{x e^{(1-x^2)}}{\sqrt[3]{1-e^{1-x^2}}}, f'_+(1) = +\infty = f'_-(-1), f'_-(1) = -\infty = f'_+(-1)$
1g. $x \in R - \{0\} : f'(x) = \frac{x e^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}, f'_+(0) = 1, f'_-(0) = -1$
1h. $x \in \cup(2k\pi; (2k+1)\pi) : f'(x) = (\sin x)^{|\cos x|} \operatorname{sgn}(\cos x) \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln(\sin x) \right)$;
 lze spoj. rozš. na $\cup < 2k\pi; (2k+1)\pi > : \bar{f}(2k\pi) = \bar{f}((2k+1)\pi) = 0$
 ??? jednostranná derivace v krajních bodech ???
2a. $D_f = < -\sqrt{2}; \sqrt{2} > ; \min f(x) = f(-1) = -1, \max f(x) = f(1) = 1$
2b. $D_f = R; \min f(x) = f(\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi) = f((2k+1)\pi) = -1, \max f(x) = f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = f(2k\pi) = 1$; lokální maxima v b. $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, lokální minima v b. $\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi$
2c. $D_f = < -3; 2 > ; \min f(x) = f(-\frac{1}{2}), \max f(x) = f(-3) = f(2)$
2d. $D_f = R; \min f(x) = f(0) = 0, \max f(x) = f(-1) = f(1) = \frac{1}{2}$
2e. $D_f = < -1; 1 > ; \max f(x) = f(\frac{1}{2}) = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$;
 minima nenabývá (lze sp. rozš.: $\bar{f}(-1) = -\frac{\pi}{2}, \bar{f}(1) = \frac{\pi}{2}$; \bar{f} nabývá min. v b. -1)
3a. $f'(x) = 2(x-a)(x-b)(2x-a-b)$ pro $x \in (a, b)$; $f'_+(a) = f'_-(a) = f'_+(b) = f'_-(b) = 0$; $f'(x) = 0$ pro $x \in (-\infty, a) \cup (b, \infty)$
3b. $g'(x) = 2xe^{-x^2}(1-x^2)$ pro $x \in (-1, 1)$; $f'_-(1) = f'_+(1) = f'_+(-1) = f'_-(-1) = 0$; $f'(x) = 0$ pro $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
4a. $D_f = < -4, \frac{1}{2} > ; f'(x) = \frac{6 \operatorname{sgn}(5x+2)}{(x-2)\sqrt{2(x+4)(1-2x)}}$ pro $x \neq -\frac{2}{5}$; $f'_+(-\frac{2}{5}) = +\frac{25}{36}, f'_-(-\frac{2}{5}) = -\frac{25}{36}, f'_+(-4) = -\infty, f'_+(\frac{1}{2}) = +\infty$
4b. $D_f = \cup < k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi > ; f'(x) = \frac{1}{2} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sqrt{\sin x \cos x}}$ pro $x \in \cup(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$;
 $f'_+(2k\pi) = +\infty = f'_+(\pi + 2k\pi), f'_-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -\infty = f'_-(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$
4c. $D_f = (0, +\infty)$; $f'(x) = \frac{\ln x}{x(1+\ln^4 x)\sqrt{\arctg(\ln^2 x)}}$; pro $x \neq 1$; $f'_+(1) = 1, f'_-(1) = -1$