

# 1. Cvičení z MA I. (5.10.06)

M. Lopatková

<http://ufal.mff.cuni.cz/~lopatkova>

Co je relace, zobrazení, funkce? Vlastnosti relace. Absolutní hodnota udává "vzdálenost" (vlastnosti vzdálenosti). Jak jinak lze měřit vzdálenost?

1. Řešte nerovnice v  $\mathbb{R}$ :

$$(i) \quad \frac{x+3}{x-1} \geq \frac{x+1}{x-5}$$

$$(ii) \quad \frac{x-2}{2x-8} \geq 1$$

$$(iii) \quad |5x-2| < x$$

$$(iv) \quad \frac{|x+1|}{x-1} \geq x$$

$$(v) \quad \log_{1/3}(x^2-3x+3) \geq 0$$

2. Ukažte, že platí:

$$(i) \quad |a+b| \leq |a|+|b|$$

$$(ii) \quad ||a|-|b|| \leq |a-b|$$

3. Pro kladná reálná  $x_1, \dots, x_n$  platí:

$$(AG \text{ nerovnost}) \quad \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n)$$

Dokažte pro  $n=2$ .

4. Nakreslete grafy funkcí:

$$(i) \quad ||x-1|-1|-1|, \quad ||x-1|^2-1|, \quad ||x-1|-1|^2$$

$$(ii) \quad \cos x, \quad \cos(x+\pi), \quad \cos(2x+\pi), \quad \sin|x|, \quad |\sin x|$$

$$(iii) \quad \sin x^2, \quad \sin 1/x, \quad \ln \sin x, \quad \ln \ln \sin x$$

5. Ukažte, že každý celočíselný obnos větší nebo roven 8 lze vyplatit pětikorunami a tříkorunami.

6. Rozhodněte o pravdivosti a negujte:

$$(i) \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{N} \quad \text{platí: } z > x \Rightarrow y < z$$

$$(ii) \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{N} \quad \text{platí: } z > x \Rightarrow y < z$$

$$(iii) \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad \text{platí: } z > x \Rightarrow y < z$$

7. Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

$$(i) \quad A \Rightarrow B, \quad \neg B \Rightarrow \neg A, \quad \neg(A \& \neg B), \quad \neg A \vee B$$

$$(ii) \quad (A \Rightarrow B) \Rightarrow C, \quad A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$$

8. Který z následujících výroků je silnější?

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists K > 0 \quad \text{takové, že } |f(x+1) - f(x)| \leq K$$

$$\exists K > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{takové, že } |f(x+1) - f(x)| \leq K$$

9. Mějme zobrazení  $f: X \rightarrow Y$ ,  $A, B \subset X$

Jaké musí mít  $f$ ,  $A$ ,  $B$  vlastnosti, aby platily následující vztahy?

$$(i) \quad \forall A \quad f^{-1}(f(A)) = A$$

$$(ii) \quad \forall A \quad f(f^{-1}(A)) = A$$

$$(iii) \quad \forall A, B \quad f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$$

$$(iv) \quad \forall A, B \quad f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$$

$$(v) \quad \forall A, B \quad f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$$

$$(vi) \quad \forall A, B \quad f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$$

Dů: Dokažte, že pro  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\forall y \in \mathbb{R}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  platí (z axiomů pro reálná čísla)

$$(i) \quad x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$$

$$(ii) \quad -x = (-1) \cdot x$$

$$(iii) \quad (x \cdot y = 0) \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0) \quad (iv) \quad (0 \leq x < y) \Rightarrow x^n < y^n$$