Základy teorie množin

Z minula byste měli znát:

1. Pojmy tranzitivní množina, dobré uspořádání a ordinální číslo
2. Základní vlastnosti ordinálních čísel a třídy $\mathbf{On}$
3. Princip transfinitní indukce
4. Konstrukci transfinitní rekurzí

Věta (o ordinálních typech): *Buď $(A, \sqsubseteq)$ dobré uspořádání. Je-li A množina, existuje právě jedno $\alpha \in \mathbf{On}$ tak, že uspořádání $(A, \sqsubseteq)$ a $(\alpha, \leq)$ jsou izomorfní. Je-li A vlastní třída a uspořádání $\leq$ je navíc úzké, tj. pro každé $x \in A$ je $\{y \in A\ ;\ y \leq x\}$ množina, je $(A, \sqsubseteq)$ izomorfní s $(\mathbf{On}, \leq)$. V obou případech je uvedený izomorfismus určen jednoznačně.*

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $A \neq \emptyset$. Hledaný izomorfismus se získá transfinitní rekurzí přes $\mathbf{On}$, přičemž konstruující funkci G definujeme například takto:

$$G(f) = \begin{cases} \min_{\sqsubseteq}(A - \operatorname{rng}(f)) & \text{pro } A - \operatorname{rng}(f) \neq \emptyset \\ \min_{\sqsubseteq}(A) & \text{jinak.} \end{cases}$$

Buď F funkce získaná touto rekurzí. Označme

$$X = \{\alpha \in \operatorname{dom}(F)\ ;\ \alpha = 0 \vee F(\alpha) \neq \min_{\sqsubseteq}(A)\}.$$

Pak $F{\restriction}X$ je hledaný izomorfismus. Jednoznačnost: je-li F' jiný takový izomorfismus pak pro nejmenší ordinál γ splňující $F(\gamma) \neq F'(\gamma)$ platí

$$F'(\gamma) = \min_{\sqsubseteq}(A - \operatorname{rng}(F'{\restriction}\gamma)) = G(F'{\restriction}\gamma) = G(F{\restriction}\gamma) = F(\gamma), \text{ spor! } \square$$

Důsledek:

Jsou-li $\alpha, \beta \in \mathbf{On}$ a $\alpha \neq \beta$, pak $(\alpha, \leq)$ a $(\beta, \leq)$ ***nejsou izomorfní****.*

Je-li dobré uspořádání $(A, \sqsubseteq)$ izomorfní $(\alpha, \leq)$ pro $\alpha \in \mathbf{On}$, říkáme, že α je typem dobrého uspořádání $(A, \sqsubseteq)$ a píšeme $\alpha = \mathrm{type}(A, \sqsubseteq)$.

Na třídě $\mathbf{On} \times \mathbf{On}$ zavádíme takzvané lexikografické uspořádání $\leq_{Le}$ takto:

$$\langle \alpha, \beta \rangle \leq_{Le} \langle \gamma, \delta \rangle \quad \overset{\text{df}}{\leftrightarrow} \quad \alpha < \gamma \vee (\alpha = \gamma \wedge \beta \leq \delta).$$

Snadno se nahlédne, že $\leq_{Le}$ je dobré uspořádání na $\mathbf{On} \times \mathbf{On}$.

Na jeho základě zavádíme na třídě ordinálních čísel následujícím způsobem operace sčítání a násobení:

$$\alpha + \beta = \mathrm{type}(\alpha \uplus \beta, \leq_{Le}) \quad (\alpha \uplus \beta = \{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \beta) \tag{1}$$

$$\alpha \cdot \beta = \mathrm{type}(\beta \times \alpha, \leq_{Le}) \tag{2}$$

Je zřejmé, že uvedené definice jsou v souladu s námi dříve zavedenými operacemi na ω a odpovídá jim i označení následníka ordinálního čísla: $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Ordinální součet a součin jsou asociativní, ale **nejsou komutativní**, neboť např. $\omega + 1 \neq 1 + \omega = \omega$ či $\omega + \omega = \omega \cdot 2 \neq 2 \cdot \omega = \omega$.

Vlastnosti ordinálních operací

Pro $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{On}$ platí:

$$\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0, \quad \alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha, \quad \alpha \cdot 2 = \alpha + \alpha$$

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \quad \textit{(distributivita zprava)}$$

$$\alpha < \beta \rightarrow \gamma + \alpha < \gamma + \beta$$

$$\alpha \leq \beta \rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$$

$$\gamma > 0 \wedge \alpha < \beta \rightarrow \gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta,$$

$$\alpha \leq \beta \rightarrow \alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$$

$$\omega \leq \alpha \rightarrow (\forall n \in \omega)\ n + \alpha = \alpha$$

$$(\omega \leq \alpha \wedge \alpha \text{ je limitní}) \rightarrow (\forall n \in \omega)\ n \cdot \alpha = \alpha$$

Mocnina α^β ordinálních čísel α, β se zavádí rekurzí podle β (α je pevné):

1. $\alpha^0 = 1$,
2. $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$,
3. $\alpha^\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} \alpha^\gamma$, je-li $\beta > 0$ limitní.

Na přirozených číslech se ordinální mocnina shoduje s tou, již jsme pro ně zavedli dříve.

Pozor: na nekonečných ordinálech ordinální mocnina neodpovídá množinové mocnině.

Ordinál $\omega^\omega = \bigcup_{n\in\omega} \omega^n$ je totiž na rozdíl od množiny ${}^\omega\omega$ spočetný:
Z $\omega \times \omega \approx \omega$ se snadno vyvodí $\omega^n \approx \omega$ a odtud následně i $\omega^\omega \approx \omega$.

Funkce $F : \mathbf{On} \to \mathbf{On}$ je normální, je-li rostoucí a spojitá (tj. $\alpha < \beta \to F(\alpha) < F(\beta)$ a $F(\gamma) = \bigcup_{\alpha<\gamma} F(\alpha)$ pro $\gamma > 0$ limitní).

Indukcí se snadno ověří, že pro normální funkci platí $\alpha \leq F(\alpha)$.

Věta (O pevném bodě normální funkce): *Pro každé $\beta \in \mathbf{On}$ má každá normální funkce pevný bod $\alpha > \beta$ ($F(\alpha) = \alpha$).*

Důkaz. Rekurzí definujme $g : \omega \to \mathbf{On}$ tak, že $g(0) = \beta$ a $g(n+1) = F(g(n))$. Buď $\alpha = \bigcup_{n<\omega} g(n)$. Jelikož F je rostoucí, je i g rostoucí, tudíž je α limitní. Ze spojitosti plyne, že $F(\alpha) = \bigcup_{\gamma<\alpha} F(\gamma)$, ovšem pravá strana je zřejmě rovna $\bigcup_{n<\omega} F(g(n)) = \bigcup_{n<\omega} g(n+1) = \alpha$. □

Každá normální funkce má tedy neomezeně mnoho pevných bodů (ty jsou tudíž uspořádny jako $\mathbf{On}$).

Příklad: Jelikož je ordinální mocnina α^α normální funkce, má pevný bod. Nejmenší ordinální číslo α takové, že $\alpha^\alpha = \alpha$ značíme ε ($= \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$).

Axiom výběru

Zobrazení f je tzv. selektor na množině x, jestliže $\mathrm{dom}(f) = x$ a $f(y) \in y$ pro každé $y \in x, y \neq \emptyset$.

Axiom výběru (AC) je tvrzení:

> *Na každé množině existuje selektor.*

Axiom výběru umožňuje pro dané x vybrat naráz z každé neprázdné množiny $y \in x$ po jednom prvku. Podstatné je, že tento výběr **tvoří množinu**.

Ekvivalentně lze axiom výběru také vyjádřit takto:

> *Kartézský součin neprázdného souboru neprázdných množin je neprázdný, tj.* pro soubor množin $\langle x_i \,;\, i \in I \rangle$ platí
>
> $$(I \neq \emptyset \wedge (\forall i \in I)\, x_i \neq \emptyset) \quad \rightarrow \quad \mathop{\Large\times}_{i \in I} x_i \neq \emptyset.$$

Axiom výběru je nezávislý na axiomech Zermelo-Fraenkelovy teorie množin (nelze jej v ní ani dokázat ani vyvrátit). Uvidíme, že je v ní ekvivalentní s následujícími principy:

Princip dobrého uspořádání:

Každou množinu lze dobře uspořádat.

což znamená, že každou množinu lze prostě zobrazit na nějaký ordinál, neboli její prvky očíslovat ordinálními čísly.

Definice: Buď $(a, \leq)$ uspořádání. Řekneme, že podmnožina $r \subseteq a$ je *řetěz* v uspořádání $(a, \leq)$, je-li relace $\leq$ lineární uspořádání na r.

Princip maximality aneb Zornovo lemma:

Nechť $(a, \leq)$ je uspořádání, jehož každý řetěz má v $(a, \leq)$ majorantu. Pak pro každé $x \in a$ existuje maximální prvek y množiny a takový, že $x \leq y$.

Ekvivalence AC, WO, a PM

Ukážeme, že v Zermelo-Fraenkelově teorii množin jsou ekvivalentní:

(WO) principu dobrého uspořádání

(AC) axiomu výběru

(PM) principu maximality

(WO)⟶(AC)

Je-li x neprázdná množina, buď $\leq$ dobré uspořádání $\bigcup x$. Pak zobrazení $f : x \to \bigcup x$ definované předpisem $f(y) = \min_{\leq} y$ pro $y \in x$ je zjevně selektor na x.

(AC)⟶(PM)

Buď $(a, \leq)$ uspořádání, jehož každý řetěz má v $(a, \leq)$ majorantu. Hledáme maximální prvek nad daným $x \in a$. Buď g selektor na $\mathcal{P}(a)$. Pro řetěz r v $(a, \leq)$ označme $\mathrm{maj}(r)$ množinu všech jeho majorant a pro $y \in a$ označme $a_y = \{z \in a \; ; \; y < z\}$. Transfinitní rekurzí definujme $F : \mathbf{On} \to b$ takto:

$$
\begin{aligned}
F(0) &= x, \\
F(\alpha) &= g(\mathrm{maj}(F''\alpha)) \text{ pro } \alpha > 0 \text{ limitní, a} \\
F(\alpha+1) &= \begin{cases} g(a_{F(\alpha)}) & \text{je-li } a_{F(\alpha)} \neq \emptyset, \\ F(\alpha) & \text{jinak.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Funkce F je neklesající, přesněji: zprvu rostoucí a od určitého α konstantní (nemůže být rostoucí všude, neb $\mathbf{On}$ je vlastní třída a b množina). Pro každé α tedy tvoří $F''\alpha$ řetěz. Buď α nejmenší ordinál, pro který existuje $\beta < \alpha$ tak, že $F(\alpha) = F(\beta)$. Tento α je izolovaný, a tedy $\alpha = \beta + 1$, neb je-li F rostoucí na limitním α, je $F(\alpha)$ větší než kterýkoli prvek z $F''\alpha$. Množina $a_{F(\beta)}$ je tedy prázdná a tudíž je $F(\beta)$ maximální prvek $(a, \leq)$. Přitom $x = F(0) \leq F(\beta)$.

(PM)⟶(WO)

Dokazujeme, že danou a lze dobře uspořádat. Položme

$$b = \{o \subseteq a \times a\ ;\ o \text{ je dobré uspořádání (části } a)\}.$$

Je $\emptyset \in b$, tedy $b \neq \emptyset$. Ukážeme, že $(b, \trianglelefteq)$, kde $o \trianglelefteq o'$ pokud uspořádání o' prodlužuje o, splňuje předpoklady PM; je-li pak o maximální prvek b, je to dobré uspořádání na celém a, neb jinak existuje $x \in a - \mathrm{dom}(o)$ a $o' = o \cup \cup \{\langle x, x\rangle\} \cup \{\langle y, x\rangle ; y \in \mathrm{dom}(o)\}$ je zjevně dobré usp. prodlužující o.

Nechť r je řetěz v b. Pak $o = \bigcup r$ je dobré uspořádání a je to majoranta řetězu r v $(b, \trianglelefteq)$. Je totiž $o_1 \trianglelefteq o$ pro každé $o_1 \in r$, neb je-li $x \in \mathrm{dom}(o_1)$ a $\langle y, x\rangle \in o$, pak $\langle y, x\rangle \in o_2$ pro nějaké $o_2 \in r$. Jelikož $o_1 \trianglelefteq o_2$ nebo $o_2 \trianglelefteq o_1$ a $x \in \mathrm{dom}(o_1)$, je $\langle y, x\rangle \in o_1$. Konečně, o je dobré uspořádání, neb je-li $u \subseteq \mathrm{dom}(o)$ a $x \in u$, je $x \in \mathrm{dom}(o_1)$ pro nějaké $o_1 \in r$. Nejmenší prvek množiny $u \cap \{y\ ;\ \langle y, x\rangle \in o\} = u \cap \{y\ ;\ \langle y, x\rangle \in o_1\}$ v uspořádání o_1 je nutně nejmenší prvek u v uspořádání o (ověřte podrobně!). $\square$

Nějaká forma axiomu výběru je nutná k důkazu řady důležitých vět v moderní algebře, analýze a dalších matematických oborech (některé z nich jsou s ním dokonce ekvivalentní). Jsou to např. tvrzení:

- *Každý vektorový prostor má bázi.*
- *Existuje lebesgueovsky neměřitelná množina v* R*.*
- *Lebesgueova míra na* R *je* σ*-aditivní*
- *Každé těleso lze algebraicky zúplnit.*
- *Je-li* f *reálná funkce a pro každou posloupnost* $\{a_n\}_{n\in\omega}$ *platí*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a),$$

  pak f *je spojitá v bodě* a*.*

AC je ekvivalentní tvrzení, že relace subvalence je trichotomická na $\mathbf{V}$, tj. pro každé dvě množiny x, y platí $x \preccurlyeq y$ nebo $y \preccurlyeq x$.

Lebesgueova míra λ_n na $\mathbb{R}^n$ je jednoznačně určenámíra na nejmenší úplné σ-algebře obsahující všechny n-rozměrné kvádry, tj. množiny tvaru

$$[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n],$$

která je invariantní vůči posunutí a splňuje $\lambda_n([0,1]^n) = 1$.

Věta (AC): *Existuje lebesgueovsky neměřitelná množina v $\mathbb{R}$.*

Důkaz. Označme $\sim$ ekvivalenci na $\mathbb{R}$ definovanou předpisem $x \sim y \leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Každá třída $[x]_\sim$ je zřejmě spočetná. Z (AC) plyne, že existuje selektor f na $[0,1]/\sim$; položme $V = \operatorname{rng}(f)$. Nechť $\{q_n \ ; \ n \in \omega\}$ je očíslování $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ a $V_n = V + q_n = \{x + q_n \ ; \ x \in V\}$. Předpokládejme, že V je měřitelná (vyvodíme spor). Množiny V_n jsou zřejmě vzájemně disjunktní, $\lambda_1(V_n) = \lambda_1(V)$ (invariance vůči posunutí) a platí $[0,1] \subseteq \bigcup_{n\in\omega} V_n \subseteq [-1,2]$.

Tudíž díky σ-aditivitě λ_1 platí $1 \leq \sum_{n\in\omega} \lambda_1(V_n) = \lambda_1(\bigcup_{n\in\omega} V_n) \leq 3$. Z první nerovnosti plyne $\lambda_1(V) > 0$, odkud ovšem $\sum_{n\in\omega} \lambda_1(V_n) = \infty$, což je ve sporu s druhou nerovností. V tedy není měřitelná. $\square$

Příklad: Každý vektorový prostor má bázi.

Připomeňme, že $B \subseteq V$ je bází vektorového prostoru V nad tělesem T, jestliže

1. B je lineárně nezávislá množina vektorů tj. z $\sum_{i=1}^{n} r_i v_i = 0$, kde $v_i \in B$ a $r_i \in T$, plyne $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0$,

2. B generuje celý prostor V, tj. $\overline{B} = V$, kde

$$\overline{X} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i v_i \; ; \quad v_i \in X,\, r_i \in T,\, 1 \leq i \leq n,\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Důkaz. Použijeme axiom výběru ve formě Zornova lemmatu.

Označme

$$\mathcal{Z} = \{X \; ; X \text{ je lineárně nezávislá množina}\}.$$

$\mathcal{Z}$ je neprázdná (např. $\emptyset \in \mathcal{Z}$) a částečně uspořádaná inkluzí.

Je zřejmé, že sjednocení řetězu lineárně nezávislých množin je lineárně nezávislá množina. Je-li totiž $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Z}$ řetěz v uspořádání $(\mathcal{Z}, \subseteq)$ (tj. uspořádání $(\mathcal{X}, \subseteq)$ je lineární) a pro nějaká $v_i \in \bigcup \mathcal{X}$, $r_i \in T$ platí $\sum_{i=1}^n r_i v_i = 0$, pak každý vektor v_i je prvkem nějakého $X_i \in \mathcal{X}$, $1 \leq i \leq n$. Díky linearitě uspořádání $(\mathcal{X}, \subseteq)$ je jedna z těchto konečně mnoha množin X_i největší v inkluzi. Označme ji X_j. Pak tedy $v_i \in X_j$ pro každé $1 \leq i \leq n$. Ovšem X_j je lineárně nezávislá množina, tudíž $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0$.

Každý řetěz $\mathcal{X}$ má tudíž v $\mathcal{Z}$ majorantu (a to $\bigcup \mathcal{X}$). Tím jsou ověřeny předpoklady Zornova lemmatu, dle něhož má tudíž $\mathcal{Z}$ maximální prvek, označme ho B. Ukážeme $\overline{B} = V$. Kdyby to neplatilo, pak by existoval nějaký $v \in V - \overline{B}$. Pak ovšem $B \cup \{v\}$ je lineárně nezávislá množina, tedy $B \cup \{v\} \in \mathcal{Z}$ ve sporu s maximalitou B. Buď totiž $rv + \sum_{i=1}^n r_i v_i = 0$. Kdyby $r \neq 0$, pak by platilo $v = -\sum_{i=1}^n \frac{r_i}{r} v_i$, čili $v \in \overline{B}$, což je spor. Tudíž $r = 0$ a tedy $\sum_{i=1}^n r_i v_i = 0$. Z lineární nezávislosti B pak plyne i $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0$. $\square$

Příklad: Je-li f reálná funkce a pro každou posloupnost $\{a_n\}_{n\in\omega}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a),$$

pak f je spojitá v bodě a.

Důkaz. Využijeme axiom výběru (AC). Postupujeme sporem. Předpokládejme, že předpoklad o limitách platí, přesto je f nespojitá v bodě a, tj.

$$(\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists y)(|a - y| < \delta \wedge |f(a) - f(y)| \geq \varepsilon). \tag{3}$$

(negace definice spojitosti). Zafixujme ε a pro každé $n > 0$ zvolme na základě (3) jedno y_n z intervalu $(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})$ tak, aby $|f(a) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Zde užíváme AC. Formálně je zobrazení $n \mapsto y_n$ selektorem na množině

$$\{\{y\ ;\ |a - y| < \frac{1}{n} \wedge |f(a) - f(y)| \geq \varepsilon\}\ ;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Je zřejmé, že $\lim_{n\to\infty} y_n = a$, ovšem $\lim_{n\to\infty} f(y_n) \neq f(a)$, neboť všechny $f(y_n)$ jsou od $f(a)$ vzdáleny přinejmenším o ε. $\square$

Některé příklady

Jako aplikace axiomu výběru, principu dobrého uspořádání, případně konstrukce transfinitní rekurzí, se můžete pokusit dokázat následující pozoruhodná (leč poněkud neužitečná) tvrzení (zbude-li čas, některá ukážu):

1. Existuje funkce $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, nabývající na každém otevřeném intervalu racionálních čísel všech hodnot.

2. Pro danou spočetnou množinu přímek P v rovině $\mathbb{R}^2$, existuje spočetná množina $M \subseteq \mathbb{R}^2$, s níž má každá přímka z P právě dva společné body.

3. Existuje množina bodů v rovině (mohutnosti kontinua), s níž má každá přímka v rovině právě dva společné body.

4. Existuje funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, nabývající na každé kružnici v R^2 (s nenulovým poloměrem) všech reálných hodnot.

Axiom výběru byl zprvu řadou matematiků a logiků odmítán pro jeho nekonstruktivní povahu: na rozdíl od ostatních axiomů postuluje existenci množiny (selektoru), aniž by ukázal, jak ji lze sestrojit (což je ovšem do jisté míry též problém axiomu potence).

Pomocí axiomu výběru lze získávat množiny značně "nekonstruktivní" povahy, viz již zmíněnou neměřitelnou podmnožinu $\mathbb{R}$.

Dnes se však axiom výběru (až na úzce vyhraněné obory) využívá zcela běžně (v některých odvětvích matematiky dokonce natolik automaticky a nevědomky, že by v nich bylo značně obtížné oddělit ta tvrzení, jež se o něj nutně opírají).

Banach-Tarského Paradox

Na závěr kapitoly o axiomu výběru uveďme jeden příklad určený spíše pro pobavení (ale též k tomu, abychom viděli, že z axiomu, jenž nám může připadat poměrně přirozený a praktický, vyplývají i velmi podivuhodné důsledky, odporující naší bezprostřední intuici):

Tvrzení: *Plnou kouli (v $\mathbb{R}^3$) o poloměru 1 lze rozdělit na 5 částí, tak, že ze vzniklých částí lze složit celé dvě plné koule o poloměru 1.*

Podobná tvrzení platí i pro další typy těles a dimenze větší než 3.

Nezkoušejte to doma, nepovede se vám to! Pomocí nože takto žádné těleso nerozdělíte. Přinejmenším proto, že potřebné *"kusy"* jsou (pochopitelně) Lebesgueovsky neměřitelné.