Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzity Karlovy

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Endomorfismy, invariantní třídy a nestandardní principy v neregulárním universu množin

Petr Pajas

Obor: Matematika
Zaměření studia: Matematické struktury
Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Josef Mlček, CSc.

Praha 1999

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury, a souhlasím s jejím zapůjčováním.

30. dubna 1999

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu své práce, J. Mlčkovi, který mi s nevšední ochotou poskytoval cenné rady, pomoc a podporu.

Petr Pajas

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Hlavním cílem práce je studovat teorii vycházející z Zermelo-Fraenkelovy teorie množin bez regularity, navrhnutou M. Boffou v práci [6] z roku 1972. V této teorii, kterou zde nazýváme universální a označujeme zkratkou **UT**, je přijetím značně silné podoby negace axiomu regularity — tzv. axiomu superuniversality — zaručena existence velkého množství rozmanitých množin, jejichž existence odporuje axiomu regularity, a nebývají proto obvykle zahrnovány do množinových univers. Jejich přítomnost však díky přijetí universální formy axiomu výběru umožňuje konstrukce, které není možno provádět v teoriích množin obsahujících axiom regularity. Mezi takové konstrukce patří např. konstrukce elementárních vnoření či netriviálních automorfismů universální třídy. Na některé otázky související s těmito možnostmi upozornili Ballard s Hrbáčkem v článku [3] publikovaném roku 1992, kde ukazují, že universální teorie je dobrým východiskem pro budování nestandardních metod v teorii množin.

V této práci je věnována pozornost především třem okruhům otázek, kterými se podrobně zabývají kapitoly 2 až 4. První z nich je otázka relativní bezespornosti **UT** vůči **ZF**. Důkaz relativní bezespornosti podal ve shora zmíněné publikaci již M. Boffa, který k němu užil metody forcingu. Ve druhé kapitole (zejm. odst. 2.3 a 2.4) předvádíme důkaz užívající v podstatě jen elementární techniky, který vychází z myšlenky důkazu uvedeného P. Aczelem v [1]. Prezentovaná verze je oproti originálu jednodušší, ale také podstatně podrobnější. Z důkazu je navíc patrné, že universální teorii je možno interpretovat v libovolném rozšíření teorie **ZF** bez regularity. Kromě relativní konzistence dále uvádíme, že v **UT** platí po relativizaci do fundovaného jádra právě ty věty, které jsou dokazatelné v **ZFC** (věta 2.4.11).

Kapitola 3 je věnována studiu množin a tříd, invariantních vůči grupám automorfismů a filtrům grup automorfismů universa množin. Zavádíme v této souvislosti tzv. orbitální ekvivalenci, do které, jak ukazujeme, náležejí dvojice právě těch množin, které lze na sebe zobrazit nějakým automorfismem universa množin. Zásadní význam má věta o orbitách (3.1.8), ze které pak relativně snadno vyvozujeme řadu důsledků. Ukazujeme tak například, že oborem množin invariantních vůči grupě všech automorfismů je fundované jádro, a též celou řadu dalších zobecnění. Zabýváme se rovněž uzavřeností oborů invariantních množin a tříd na definování.

Poslední okruh otázek se týká vlastností endomorfismů universální třídy, téměř výhradně však těch, které zobrazují universální třídu do nějaké tranzitivní skorouniversální třídy W, saturované v nějaké nespočetné kardinalitě. Taková zobrazení spolu s příslušnou třídou W označujeme jako reflexe. Právě reflexe umožňují interpretaci nestandardních pojmů v **UT**. V kapitole 4 nejprve rekapitulujeme, jak lze reflexe konstruovat a jak pomocí nich můžeme realizovat nestandardní pojmy a principy, podrobněji se pak věnujeme tzv. jednoduchým reflexím; ukazujeme, že pojem jednoduchosti reflexe charakterizuje typ reflexí, jejichž universum lze sestrojit jako izomorfní obraz ultramocniny universální třídy (4.5.2). Dokážeme také, že obor jednoduchých reflexí je uzavřen na ultraprodukty (4.5.6) a na skládání (4.5.7) a uvádíme způsob, jakým můžeme získat reflexe, které nejsou jednoduché (4.5.8). Dále se zabýváme otázkou kardinálního kolapsu (odst. 4.4), tj. zhruba otázkou „vnější“ kardinality množin z nestandardních univers, a tzv. principem kategoričnosti, který (až na jistá omezení kardinalit) tvrdí, že libovolné dvě internálně prezentované struktury téže mohutnosti, které jsou elementárně ekvivalentní, jsou izomorfní. Pomocí tohoto principu se pokusíme rovněž poněkud osvětlit strukturu monád orbitální ekvivalence nestandardních přirozených čísel (tvrz. 4.6.2). Zmíníme konečně i fakt, že oborem množin invariantních vůči elementárním vnořením je množina dědičně konečných množin (4.6.1).

Následující odstavec věnujeme zopakování několika základních pojmů a zavedení označení, kterého budeme v dalším textu užívat.

1.1 Základní pojmy a definice

Východiskem pro naši práci bude *Zermelo-Fraenkelova teorie množin* v jazyce $<\in>$ bez axiomu regularity, kterou označíme $\mathbf{ZF}_-$. Teorie $\mathbf{ZF}_-$ tak sestává z axiomů *extenzionality, dvojice, sumy, potence a nekonečna* a schémat axiomů *vydělení a nahrazení.*[1] Teorii, která vznikne rozšířením $\mathbf{ZF}_-$ o *axiom výběru* budeme označovat $\mathbf{ZFC}_-$. Přidáme-li k výše uvedeným teoriím *axiom regularity*, získáme teorie, jež budeme, jak bývá zvykem, označovat **ZF** resp. **ZFC**.

Pro řadu úvah bude zapotřebí užít silné formy axiomu výběru. K její formulaci je nutno rozšířit jazyk teorie množin o nový unární funkční symbol $\mathcal{C}$.

Axiom silného výběru

$$(\forall x)(\mathcal{C}(x) \text{ je ordinální číslo}) \;\&\; (\forall \alpha)(\alpha \text{ je ordinální číslo} \Rightarrow (\exists! x)(\mathcal{C}(x) = \alpha)).$$

Teorii v jazyce $<\in, \mathcal{C}>$ sestávající z axiomů teorie $\mathbf{ZF}_-$, schémat vydělení a nahrazení (pro formule jazyka $<\in, \mathcal{C}>$) a axiomu silného výběru budeme označovat $\mathbf{ZFS}_-$. Teorii, která vznikne rozšířením $\mathbf{ZFS}_-$ o axiom regularity, označíme **ZFS**.

Budeme užívat obvyklých konvencí pro práci s třídami a třídovými termy tak, jak je tomu např. v učebnici [2]. V této knize lze nalézt rovněž zmíněné axiomy teorie **ZFC**, stejně jako další pojmy teorie množin, se kterými budeme běžně pracovat.

Úmluva 1.1.1. Pro označení tříd resp. třídových proměnných budeme užívat velkých písmen. Budeme-li chtít zdůraznit, že nějaká třída je množinou, užijeme pro ni malého písmene. Malých písmen budeme užívat výhradně pro označení množin, resp. množinových proměnných.

Označení. Symbolem $\mathbf{V}$ označme třídu všech množin ($\mathbf{V} = \{\, x \mid x = x \,\}$). Třídu $\mathbf{V}$ budeme nazývat *universální třídou.* Symbolem **On** označme třídu všech ordinálních čísel a symbolem **Id** identickou relaci na $\mathbf{V}$, tj. třídu $\{\, \langle x, x\rangle \mid x = x \,\}$. Pro libovolnou třídu X označíme dále symbolem $\in_X$ třídovou relaci $\{\, \langle x, y\rangle \in X^2 \mid x \in y \,\}$. Symbolem ω budeme označovat množinu přirozených čísel, tedy nejmenší (neprázdné) limitní ordinální číslo. Budeme-li pracovat v teorii v jazyce $<\in, \mathcal{C}>$, označíme písmenem $\mathbf{C}$ třídu $\{\, \langle x, y\rangle \mid y = \mathcal{C}(x) \,\}$.

[1] Otázku, které z uvedených axiomů je možno vynechat, ponechme stranou.

Poznámka 1.1.2. Axiom silného výběru lze nyní formulovat tak, že třída $\mathbf{C}$ je vzájemně jednoznačným zobrazením třídy $\mathbf{V}$ na třídu $\mathbf{On}$. Je zřejmé, že axiom silného výběru implikuje axiom výběru.

Definice 1.1.3. Řekneme, že množina x je *urelement*, jestliže $x = \{x\}$. Třídu všech urelementů budeme označovat $\mathbf{Ur}$.

Definice 1.1.4. Položme

$$
\begin{aligned}
p_0 &= \emptyset, \\
p_{\alpha+1} &= \mathscr{P}(p_\alpha) \quad \text{pro každé } \alpha \in \mathbf{On}, \\
p_\lambda &= \bigcup_{\alpha<\lambda} p_\alpha \quad \text{pro } \lambda \in \mathbf{On} \text{ limitní.}
\end{aligned}
$$

Třídu $\bigcup_{\alpha\in\mathbf{On}} p_\alpha$ nazýváme *fundované jádro* a značíme $\mathbf{WF}$.

Pozorování 1.1.5. *Zřejmě platí* $\mathbf{WF} \cap \mathbf{Ur} = \emptyset$.

Definice 1.1.6. Pro libovolné třídy X, Y označíme

(i) $\mathrm{Dom}(X) = \{\, x \mid (\exists y)(\langle x, y\rangle \in X) \,\}$ *definiční obor třídy* X,

(ii) $\mathrm{Rng}(X) = \{\, y \mid (\exists x)(\langle x, y\rangle \in X) \,\}$ *obor hodnot třídy* X,

(iii) $X \restriction Y = \{\, \langle y, z\rangle \in X \mid y \in Y \,\}$ *restrikci třídy* X *na* Y a

(iv) $X''Y = \{\, z \mid (\exists y \in Y)(\langle y, z\rangle \in X) \,\}$ *obraz třídy* Y *daný třídou* X.

Definice 1.1.7. Pro libovolné relace R, S definujeme

(i) $R^{-1} = \{\, \langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R \,\}$,

(ii) $R \circ S = \{\, \langle x, z\rangle \mid (\exists y)(\langle x, y\rangle \in S \;\&\; \langle y, z\rangle \in R) \,\}$.

Říkáme, že R^{-1} je *inverzní relace k* R a že relace $R \circ S$ vznikla *složením relací* R *a* S.

Definice 1.1.8. Nechť F je zobrazení. Je-li X libovolná třída, budeme třídy $F''X$ a $F^{-1''}X$ někdy označovat též $F[X]$ a $F^{-1}[X]$. Řekneme, že množina x je *pevným bodem* zobrazení F, jestliže $x \in \mathrm{Dom}(F)$ a $F(x) = x$. Řekneme dále, že zobrazení F je *identické na třídě* X, je-li každý prvek třídy $X \cap \mathrm{Dom}(F)$ pevným bodem zobrazení F, neboli $F \restriction X \subseteq \mathbf{Id}$.

Definice 1.1.9. Je-li dána nějaká třída A a množina a, nechť ${}^aA$ označuje *třídu všech zobrazení množiny* a *do* A.

Definice 1.1.10. Je-li R relace s definičním oborem I, je výraz

$$\langle R_i \mid i \in I\rangle, \tag{1.1}$$

kde $R_i = R''\{i\}$ pro každé $i \in I$, jen jiným označením relace R. Říkáme také, že (1.1) je *soubor tříd* (resp. *soubor množin*, je-li R_i množina pro každé $i \in I$), I je jeho *indexová třída*. Prvky I nazýváme *indexy*. Řekneme, že třída X náleží do souboru (1.1), jestliže pro nějaké $i \in I$ platí $X = R_i$. Soubory tříd, jejichž indexová třída je ordinální číslo budeme nazývat *posloupnostmi tříd* (resp. *množin*). Soubory, jejichž indexová třída je množina $\{0, 1\}$ budeme nazývat *dvojice*.

Přirozeným způsobem lze nyní definovat průnik a sjednocení souboru tříd, či kartézský součin souboru tříd, pro soubory, jejichž indexová třída je množinou.

Definice 1.1.11. Nechť φ je formule se všemi volnými proměnnými mezi $x, x_1, \dots, x_n$ a $p_1, \dots, p_n$ libovolné množiny. Řekneme, že třída X je definovaná formulí φ z parametrů $p_1, \dots, p_n$, jestliže platí

$$(\forall x)(x \in X \Leftrightarrow \varphi(x, p_1, \dots, p_n)).$$

Řekneme dále, že třída X je uzavřena na definování, jestliže každá množina definovaná nějakou formulí z parametrů náležících do X je prvkem X.

Pozorování 1.1.12. *Množina a je definovaná nějakou formulí z parametrů $p_1, \dots, p_n$ právě tehdy, když existuje formule ψ se všemi volnými proměnnými mezi $x, x_1, \dots, x_n$ taková, že platí*

$$(\exists! x)\psi(x, p_1, \dots, p_n) \;\&\; \psi(a, p_1, \dots, p_n).$$

Definice 1.1.13. Buď X nějaká množina. Řekneme, že množina X je *centrovaná* či *centrovaný systém*, jestliže pro každou konečnou podmnožinu $Y \subseteq X$ platí $\bigcap Y = \emptyset$.

Definice 1.1.14. Buď X třída.

(i) Řekneme, že X je *tranzitivní*, jestliže $(\forall x)(x \in X \Rightarrow x \subseteq X)$.

(ii) Řekneme, že X je *kotranzitivní*, jestliže $(\forall x)(x \subseteq X \Rightarrow x \in X)$.

Pozorování 1.1.15. *Je-li X kotranzitivní, je* $\mathbf{WF} \subseteq X$.

Definice 1.1.16. Buď x libovolná množina. Definujme posloupnost množin $\langle a_n \mid n \in \omega \rangle$ tak, že $a_0 = x$ a $a_{n+1} = \bigcup a_n$ pro každé $n \in \omega$. Položme $\mathrm{TC}(x) = \bigcup \{ a_n \mid n \in \omega \}$. Množinu $\mathrm{TC}(x)$ nazýváme *tranzitivní obal* (též *uzávěr*) *množiny* x. Je-li X vlastní třída, nazýváme *tranzitivním obalem* (*uzávěrem*) *třídy* X třídu $\mathrm{TC}(X) = \bigcup_{x \in X} \mathrm{TC}(\{x\})$.

Pozorování 1.1.17. *Je-li X libovolná třída, je* $\mathrm{TC}(X)$ *nejmenší tranzitivní třída obsahující X jako část.*

Následující definice faktorizace třídy podle dané ekvivalence užívá axiomu silného výběru a je formulována v $\mathbf{ZFS}_{-}$.

Definice 1.1.18. Nechť $\sim$ je libovolná relace ekvivalence na třídě A. Pro každé $x \in A$ označme $[x]_\sim$ *rozkladovou třídu* $\{ y \in A \mid x \sim y \}$ *prvku x podle* $\sim$. Nechť $\pi_\sim(x)$ označuje ten prvek y třídy $[x]_\sim$, pro který je $\mathbf{C}(y)$ nejmenší možné. Symbolem $A/{\sim}$ označme třídu $\{ \pi_\sim(x) \mid x \in A \}$, která tak obsahuje právě jeden prvek z každé rozkladové třídy ekvivalence $\sim$. Třídu $A/{\sim}$ nazveme *kvocientovou (či faktorovou) třídou třídy A podle* $\sim$ a zobrazení $\pi_\sim \colon A \to A/{\sim}$ *kvocientovým zobrazením třídy A podle* $\sim$.

Kapitola 2

Universální teorie

Universální teorií (**UT**) nazýváme teorii, která vznikne ze $\mathbf{ZFS}_-$ přidáním *axiomu superuniversality*. Ten asi jako první formuloval M. Boffa [6]. Axiom superuniversality tvrdí, že pro každé koncové extenzionální rozšíření $\langle a, r\rangle$ struktury $\langle t, \in_t\rangle$, kde t je libovolná tranzitivní množina a $r \subseteq a \times a$, existuje tranzitivní množina $s \supseteq t$ taková, že struktury $\langle a, r\rangle$ a $\langle s, \in_s\rangle$ jsou izomorfní, přičemž tento izomorfismus je identický na t. Uvedený axiom zaručuje existenci velké škály neregulárních množin a pomocí jeho transfinitní iterace lze např. dokázat tzv. *princip universality*, který v určitém ohledu zobecňuje Mostowského větu o kolapsu. Uvidíme později, že axiom superuniversality v jistém smyslu postuluje zároveň *homogenitu* a *universalitu* universa množin, tj. jednak, že libovolnou extenzionální strukturu $\langle a, r\rangle$ můžeme izomorfně (vzhledem k relacím r a $\in$) vnořit do universa množin na nějakou tranzitivní množinu a dále, že libovolnou podobnost množin (tj. zobrazení mezi dvěma tranzitivními množinami, které je izomorfismem vzhledem k $\in$) lze rozšířit do automorfismu celého universa.

Ústředním pojmem, který usnadňuje formulování řady tvrzení, je pojem $\in$-struktury. Za $\in$-strukturu považujeme libovolnou dvojici tříd $\langle A, E\rangle$, kde E je úzká relace na A. Je-li E navíc extenzionální, hovoříme o extenzionální $\in$-struktuře. Základní definice a elementární pozorování týkající se $\in$-struktur tvoří spolu axiomem superuniversality náplň prvního odstavce. Ve druhém a třetím odstavci připravujeme studiem jistých typů relací na $\in$-strukturách a konstrukcí tzv. superuniversální struktury důkaz relativní bezespornosti teorie **UT** vůči $\mathbf{ZF}_-$. Ten je pak na základě Riegerovy věty podrobně proveden ve čtvrtém odstavci přirozenou interpretací teorie **UT** v $\mathbf{ZFS}_-$ pomocí superuniversální $\in$-struktury, sestrojené na základě výsledků předcházejících odstavců. Důkaz námi uvedený se opírá o důkaz provedený v hrubých rysech P. Aczelem v [1]. Zde jej zpracováváme značně podrobněji a provádíme též určitá zjednodušení. Teorii $\mathbf{ZFS}_-$ lze interpretovat např. v universu konstruovatelných množin. Z tohoto faktu již vyplývá relativní konzistence teorie **UT** vůči $\mathbf{ZF}_-$. Opřeme-li se navíc o tvrzení, že **ZFS** je konzervativním rozšířením **ZFC**, dokázané Felgnerem v [7], uvidíme, že v **UT** jsou o množinách z fundovaného jádra dokazatelné právě ty věty, jež jsou dokazatelné v **ZFC**. Pátý odstavec věnujeme dalším vlastnostem superuniversálních $\in$-struktur, mezi něž patří např. věta o izomorfismu superuniversálních $\in$-struktur a v posledním odstavci upozorňujeme na již zmíněný princip universality.

2.1 Universální teorie

Universální teorie **UT**, je teorií, která vznikne z **ZFS₋** přidáním *axiomu superuniversality.* Abychom mohli axiom superuniversality pohodlně formulovat, bude užitečné zavést nejprve několik pojmů a potřebné značení.

Definice 2.1.1. Řekneme, že binární relace R na třídě A je *úzká*, jestliže pro každé $x \in A$ je $\{ y \mid y \, R \, x \}$ množina.

Definice 2.1.2. $\in$*-strukturou* rozumíme dvojici $\langle A, E \rangle$, kde A je libovolná třída, nazývaná *nosič* $\in$*-struktury* a $E \subseteq A \times A$ je úzká binární relace na třídě A.

Úmluva 2.1.3. Na $\in$-struktury nahlížíme jako na modely (interpretace) jazyka $<\in>$ a budeme je zkráceně označovat gotickými písmeny: $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ Jejich nosiče budeme v takovém případě označovat odpovídajícími písmeny $A, B, \ldots$ a pro příslušné binární relace budeme užívat symbolů $\in^A, \in^B, \ldots$ Budeme-li chtít zdůraznit, že nosičem $\in$-struktury je množina, užijeme pro její označení ve shodě s úmluvou 1.1.1 malého gotického písmene.

Definice 2.1.4. Nechť $\mathfrak{A}$ je $\in$-struktura. Je-li $x \in A$, označme $x_{\mathfrak{A}}$ množinu $\{ y \in A \mid y \in^A x \}$. Řekneme, že $\in$-struktura $\mathfrak{A}$ je *extenzionální*, je-li relace $\in^A$ extenzionální, tj. platí-li

$$x_{\mathfrak{A}} = y_{\mathfrak{A}} \Rightarrow x = y$$

pro každé $x, y \in A$.

Definice 2.1.5. Jsou-li $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $\in$-struktury takové, že $B \subseteq A$ a $\in^B = (\in^A \cap (B \times B))$, řekneme, že $\mathfrak{B}$ je *podstrukturou* v $\mathfrak{A}$ a píšeme $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$. Naopak, je-li $\mathfrak{A}$ $\in$-struktura a $B \subseteq A$ libovolná podtřída, označme $\mathfrak{A}|_B$ $\in$-strukturu tvořenou dvojicí $\langle B, \in^B \rangle$, kde $\in^B = (\in^A \cap (B \times B))$. $\in$-strukturu $\mathfrak{A}|_B$ nazveme *kanonickou podstrukturou* $\in$-struktury $\mathfrak{A}$ *danou třídou* B.

Definice 2.1.6. Řekneme, že $\mathfrak{B}$ je *tranzitivní podstruktura* $\in$-struktury $\mathfrak{A}$ (značíme $\mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{A}$), pokud $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ a $(\forall x \in B)(x_{\mathfrak{B}} = x_{\mathfrak{A}})$. V tom případě říkáme rovněž, že $\mathfrak{A}$ je *koncové rozšíření* $\mathfrak{B}$.

Poznámka 2.1.7. Všimněme si, že třída T je tranzitivní právě tehdy, když je $\in$-struktura $\langle T, \in_T \rangle$ tranzitivní ve $\langle \mathbf{V}, \in_{\mathbf{V}} \rangle$.

Definice 2.1.8. Nechť $\mathfrak{A}$ je libovolná $\in$-struktura a a podmnožina A. Položme $a_0 = a$ a $a_{n+1} = \bigcup_{x \in a_n} x_{\mathfrak{A}}$ pro každé $n \in \omega$. Množina $\mathrm{TC}_{\mathfrak{A}}(a) = \bigcup_{n \in \omega} a_n$ je nosičem nejmenší tranzitivní podstruktury $\in$-struktury $\mathfrak{A}$ obsahující množinu a jako část. Odpovídající kanonickou podstrukturu $\mathfrak{A}|_{\mathrm{TC}_{\mathfrak{A}}(a)}$ nazýváme *tranzitivní obal* nebo též *tranzitivní uzávěr* množiny a v $\mathfrak{A}$ a označujeme ji $\mathbf{TC}_{\mathfrak{A}}(a)$.

Definice 2.1.9. Buď $\mathfrak{A}$ $\in$-struktura a $B \subseteq A$. Je-li B vlastní třída, položme

$$\mathrm{TC}_{\mathfrak{A}}(B) = \bigcup_{x \in B} \mathrm{TC}_{\mathfrak{A}}(\{x\})$$

a $\mathbf{TC}_{\mathfrak{A}}(B) = \mathfrak{A}|_{\mathrm{TC}_{\mathfrak{A}}(B)}$. $\in$-strukturu $\mathbf{TC}_{\mathfrak{A}}(B)$ nazýváme *tranzitivní obal* či *tranzitivní uzávěr* třídy B v A.

Pozorování 2.1.10. *Nechť* $\mathfrak{A}$ *je* $\in$*-struktura.*

(i) Je-li $B \subseteq A$, pak $\mathbf{TC}_{\mathfrak{A}}(B) \leqslant \mathfrak{A}$.

(ii) Je-li $\mathfrak{C}$ $\in$-struktura, $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{C}$ a $B \subseteq A$, pak $\mathbf{TC}_{\mathfrak{A}}(B) = \mathbf{TC}_{\mathfrak{C}}(B)$.

Definice 2.1.11. Nechť $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ jsou $\in$-struktury a $F\colon A \to B$ zobrazení. Řekneme, že

(i) zobrazení F je *věrné*, pokud pro každé $x \in A$ platí $(F(x))_{\mathfrak{B}} = F''x_{\mathfrak{A}}$;

(ii) F je *izomorfismus* $\in$-struktur $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$, je-li vzájemně jednoznačným zobrazením třídy A na B a pro každé $x, y \in A$ platí

$$x \in^A y \Leftrightarrow F(x) \in^B F(y);$$

(iii) F je *automorfismus* $\in$-struktury $\mathfrak{A}$, je-li $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ a F je izomorfismus $\in$-struktur $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$;

(iv) F je *vnoření* $\in$-struktury $\mathfrak{A}$ do $\mathfrak{B}$, je-li prosté a věrné;

(v) $\in$-struktury $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ jsou *izomorfní* (značíme $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$), jestliže existuje zobrazení, které je izomorfismem $\in$-struktur $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$.

Pozorování 2.1.12.

(i) Zobrazení $F\colon A \to B$ je izomorfismus $\in$-struktur $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ právě tehdy, je-li bijektivní a věrné.

(ii) Je-li F izomorfismus $\in$-struktur $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$, je F^{-1} izomorfismus struktur $\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{A}$.

(iii) Je-li F izomorfismus $\in$-struktur $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ a G izomorfismus $\in$-struktur $\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{C}$, je $G \circ F$ izomorfismus $\in$-struktur $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{C}$.

Pozorování 2.1.13. *Nechť F je vnoření $\in$-struktury $\mathfrak{A}$ do $\mathfrak{B}$. Označme $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}|_{\mathrm{Rng}(F)}$. Pak $\mathfrak{C} \leqslant \mathfrak{B}$ a F je izomorfismus $\in$-struktur $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{C}$.*

Na závěr přistupme k vyslovení axiomu:

Axiom superuniversality

Je-li t tranzitivní množina a $\mathfrak{a}$ extenzionální $\in$-struktura taková, že $\langle t, \in_t\rangle \leqslant \mathfrak{a}$, potom existuje tranzitivní množina $t' \supseteq t$ a izomorfismus struktur $\mathfrak{a}$ a $\langle t', \in_{t'}\rangle$, který je identický na množině t.

2.2 Extenzivní relace a nejmenší extenzionální kvocient

Věnujme se nyní otázce extenzionality $\in$-struktur a extenzivním relacím na nich. Získané výsledky v příštích odstavcích využijeme při důkazu relativní konzistence teorie **UT** vůči **ZFS$_-$**.

Definice 2.2.1. Buď $\mathfrak{A}$ $\in$-struktura a R relace na A. Označme R^+ relaci definovanou na A předpisem

$$x\, R^+ y \Leftrightarrow (\forall u \in x_{\mathfrak{A}})(\exists v \in y_{\mathfrak{A}})(u\, R\, v)\ \&\ (\forall v \in y_{\mathfrak{A}})(\exists u \in x_{\mathfrak{A}})(u\, R\, v).$$

Řekneme, že relace R je *extenzivní na* $\mathfrak{A}$ pokud platí $R \supseteq R^+$; řekneme, že R je *koextenzivní na* $\mathfrak{A}$, jestliže $R \subseteq R^+$.

Úmluva 2.2.2. Označení R^+ z předchozí definice budeme užívat i nadále, bude-li z kontextu zřejmé o jakou $\in$-strukturu se jedná.

Pozorování 2.2.3. *Nechť $\mathfrak{A}$ je $\in$-struktura.*

(i) Jsou-li R, S relace na A, pak $R \subseteq S \Rightarrow R^+ \subseteq S^+$.

(ii) $\mathfrak{A}$ je extenzionální právě tehdy, když identická relace $\mathbf{Id} \restriction A$ je extenzivní na $\mathfrak{A}$.

(iii) Relace $\mathbf{Id} \restriction A$ je nejmenší reflexivní extenzivní relace na každé extenzionální struktuře.

Naším prvním cílem bude ukázat, že na každé $\in$-struktuře $\mathfrak{A}$ existuje (vzhledem k inkluzi) nejmenší reflexivní extenzivní relace, o níž navíc dokážeme, že je koextenzivní ekvivalencí. Uvidíme dále, že faktorizací struktury $\mathfrak{A}$ podle této ekvivalence obdržíme extenzionální $\in$-strukturu.

Lemma 2.2.4. *Nechť $\mathfrak{A}$ je $\in$-struktura a R libovolná relace na A. Pak platí:*

(i) Pokud $\mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{A}$, je $(R \cap (B \times B))^+ = R^+ \cap (B \times B)$.

(ii) Pokud $\mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{A}$ a R je reflexivní a extenzivní na $\mathfrak{A}$, je relace $R \cap (B \times B)$ reflexivní extenzivní na B.

(iii) Je-li R symetrická, je i R^+ symetrická.

(iv) Je-li R tranzitivní, je i R^+ tranzitivní.

Důkaz. Snadné. □

Buď nyní $\mathfrak{a}$ množinová $\in$-struktura. Položme $\kappa = |a| \cdot \aleph_0$. Transfinitní indukcí přes κ^+ definujme posloupnost relací $\langle s_\alpha \mid \alpha \in \kappa^+ \rangle$ tak, že:

(i) $s_0 = \mathbf{Id} \restriction a$,

(ii) $s_{\alpha+1} = s_\alpha^+$ pro $\alpha \in \kappa^+$,

(iii) $s_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} s_\alpha$ pro $\lambda \in \kappa^+$ limitní.

Označme $\sim_{\mathfrak{a}} = \bigcup_{\alpha \in \kappa^+} s_\alpha$.

Lemma 2.2.5. *Pro libovolná ordinální čísla α, β platí:*

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow s_\alpha \subseteq s_\beta.$$

Důkaz. Stačí dokázat, že pro každé ordinální číslo α je $s_\alpha \subseteq s_{\alpha+1}$. Je zřejmé, že $\mathbf{Id} \restriction \mathfrak{a} \subseteq$ $\subseteq (\mathbf{Id} \restriction \mathfrak{a})^+$, tedy $s_0 \subseteq s_1$. Buď γ ordinální číslo a předpokládejme, že pro všechna ordinální čísla $\alpha < \gamma$ platí $s_\alpha \subseteq s_{\alpha+1}$. Je-li γ tvaru $\beta + 1$, pak $s_\beta \subseteq s_\gamma$ a podle 2.2.3 (i) $s_\gamma = s_\beta^+ \subseteq s_\gamma^+ =$ $= s_{\gamma+1}$. Je-li γ limitní, je $s_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} s_\beta$. Pro každé $\beta \leqslant \gamma$ tak dostáváme $s_\beta \subseteq s_{\beta+1} = s_\beta^+ \subseteq$ $\subseteq s_\gamma^+ = s_{\gamma+1}$, a tedy $s_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} s_\beta \subseteq s_{\gamma+1}$. □

Tvrzení 2.2.6. *Relace $\sim_{\mathfrak{a}}$ je ekvivalence, $\sim_{\mathfrak{a}}^+ = \sim_{\mathfrak{a}}$ a pro každou reflexivní extenzivní relaci R na a platí*

$$(\forall x, y \in a)(x \sim_{\mathfrak{a}} y \Rightarrow x \, R \, y).$$

Důkaz. Relace $s_0 = \mathbf{Id}\restriction a$ z definice $\sim_{\mathfrak{a}}$ je zřejmě ekvivalence, díky 2.2.4 (iii), (iv) jsou ekvivalencemi všechny s_α, $\alpha \in \kappa^+$, a tedy rovněž $\sim_{\mathfrak{a}}$ je ekvivalence. Dále dokážeme, že $\sim_{\mathfrak{a}}^+ = \sim_{\mathfrak{a}}$. Nechť $x \sim_{\mathfrak{a}} y$. Pak existuje ordinální číslo $\alpha \in \kappa^+$ takové, že $a\, s_{\alpha+1}\, b$, tedy $x\, s_\alpha^+\, y$ a z monotonie operace $^+$ (viz. 2.2.3 (i)) aplikované na inkluzi $s_\alpha \subseteq \sim_{\mathfrak{a}}$ plyne $x \sim_{\mathfrak{a}}^+ y$. Nechť naopak $x \sim_{\mathfrak{a}}^+ y$, tj. $(\forall u \in x_{\mathfrak{A}})(\exists v \in y_{\mathfrak{A}})(u \sim_{\mathfrak{a}} v)\ \&\ (\forall v \in y_{\mathfrak{A}})(\exists u \in x_{\mathfrak{A}})(u \sim_{\mathfrak{a}} v)$. Z axiomu výběru plyne, že existují funkce $f\colon x_{\mathfrak{a}} \to y_{\mathfrak{a}}$ a $g\colon y_{\mathfrak{a}} \to x_{\mathfrak{a}}$ takové, že $u \sim_{\mathfrak{a}} f(u)$ a $v \sim_{\mathfrak{a}} g(v)$ pro každé $u \in x_{\mathfrak{a}}, v \in y_{\mathfrak{a}}$. Označme $\alpha(u) = \min\{\, \alpha \in \kappa^+ \mid u\, s_\alpha\, f(u)\,\}$ a $\beta(v) = \min\{\, \beta \in \kappa^+ \mid v\, s_\beta\, g(v)\,\}$ pro $u \in x_{\mathfrak{a}}$, $v \in y_{\mathfrak{a}}$ a položme $\gamma = \sup(\mathrm{Rng}(\alpha) \cup \mathrm{Rng}(\beta))$. Jelikož κ^+ je regulární kardinál, je $\gamma \in \kappa^+$. Pro každé $u \in x_{\mathfrak{a}}$ a $v \in y_{\mathfrak{a}}$ je nyní $s_{\alpha(u)} \subseteq s_\gamma$ a $s_{\beta(v)} \subseteq s_\gamma$, čili $u\, s_\gamma\, f(u)$ a $v\, s_\gamma\, g(v)$. Platí tedy $x\, s_\gamma^+\, y$ a protože $s_\gamma^+ = s_{\gamma+1}$, je $x \sim_{\mathfrak{a}} y$. Buď konečně R libovolná reflexivní extenzivní relace na $\mathfrak{a}$. Máme ukázat, že $\sim_{\mathfrak{a}} \subseteq R$; stačí prověřit inkluzi $s_\alpha \subseteq R$ pro každé $\alpha \in \kappa^+$. Protože je R reflexivní, platí $s_0 = \mathbf{Id}\restriction a \subseteq R$. Limitní krok je zřejmý. Nechť $s_\alpha \subseteq R$ pro nějaké $\alpha \in \kappa^+$. Pak $s_\alpha^+ \subseteq R^+$ podle 2.2.3 (i), a tedy $s_{\alpha+1} = s_\alpha^+ \subseteq R$, neboť R je extenzivní. □

Lemma 2.2.7. *Jestliže $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}$, pak $\sim_{\mathfrak{b}} = \sim_{\mathfrak{a}} \cap (b \times b)$*

Důkaz. Plyne snadno indukcí z 2.2.4 (i). □

Definice 2.2.8. Buď $\mathfrak{A}$ $\in$-struktura, jejíž nosič A je vlastní třída. Pro $x, y \in A$ položme $x \sim_{\mathfrak{A}} y$ právě tehdy, když $x \sim_{\mathbf{TC}_{\mathfrak{A}}(\{x,y\})} y$.

Z definice relace $\sim_{\mathfrak{A}}$ a předchozího lemmatu ihned dostáváme

Lemma 2.2.9. *Pro každou $\in$-strukturu $\mathfrak{A}$ platí:*

(i) $x \sim_{\mathfrak{A}} y \Leftrightarrow (\forall \mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{A})(x, y \in a \Rightarrow x \sim_{\mathfrak{a}} y) \Leftrightarrow (\exists \mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{A})(x, y \in a\ \&\ x \sim_{\mathfrak{a}} y)$

(ii) Je-li $\mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{A}$, pak $\sim_{\mathfrak{B}} = \sim_{\mathfrak{A}} \cap (B \times B)$

Tvrzení 2.2.10. *Buď $\mathfrak{A}$ $\in$-struktura. Relace $\sim_{\mathfrak{A}}$ je extenzivní a současně koextenzivní ekvivalence na $\mathfrak{A}$ (tedy $\sim_{\mathfrak{A}}^+ = \sim_{\mathfrak{A}}$) a pro každou reflexivní extenzivní relaci R na A platí*

$$(\forall x, y \in A)(x \sim_{\mathfrak{A}} y \Rightarrow x\, R\, y).$$

Důkaz. Vyplývá bezprostředně z předchozího lemmatu, lemmatu 2.2.4 a tvrzení 2.2.6. □

Tvrzení 2.2.11. *Nechť F je izomorfismus $\in$-struktur $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$. Pak pro každé $x, y \in A$ platí*

$$x \sim_{\mathfrak{A}} y \Leftrightarrow F(x) \sim_{\mathfrak{B}} F(y).$$

Důkaz. Snadno se nahlédne, že relace R definovaná na A předpisem $x\, R\, y \Leftrightarrow F(x) \sim_{\mathfrak{B}} F(y)$ je reflexivní a extenzivní, a tedy podle 2.2.10 platí $x \sim_{\mathfrak{A}} y \Rightarrow x\, R\, y$. Opačná implikace plyne analogickou úvahou pro F^{-1}. □

Důsledek 2.2.12. *Nechť F je vnoření $\in$-struktury $\mathfrak{A}$ do $\mathfrak{B}$. Pak pro každé $x, y \in A$ platí*

$$x \sim_{\mathfrak{A}} y \Leftrightarrow F(x) \sim_{\mathfrak{B}} F(y).$$

Důkaz. Stačí si uvědomit, že třída $C = \mathrm{Rng}(F)$ je nosičem tranzitivní podstruktury $\mathfrak{C}$ $\in$-struktury $\mathfrak{B}$, a F je tudíž izomorfismus $\in$-struktur $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$. □

Tvrzení 2.2.13. *Je-li $\mathfrak{A}$ extenzionální $\in$-struktura, pak $\sim_{\mathfrak{A}} = \mathbf{Id}\restriction A$.*

Důkaz. Je-li A množina, vyplývá tvrzení bezprostředně z definice relace $\sim_{\mathfrak{A}}$ pro množiny a protože každá tranzitivní podstruktura extenzionální struktury je opět extenzionální, je tvrzení zřejmé i v případě, že A je vlastní třída. □

Ve zbytku odstavce pracujeme v **ZFS₋**.

Definice 2.2.14. Nechť $\mathfrak{A}$ je $\in$-struktura a $\sim$ koextenzivní ekvivalence na $\mathfrak{A}$. Na třídě $A/\sim$ definujme binární relaci $\in^{A/\sim}$ jakožto třídu $\{\, \langle \pi_\sim(x), \pi_\sim(y) \rangle \mid x \in^A y \,\}$. Dvojici $\langle A/\sim, \in^{A/\sim} \rangle$ budeme označovat $\mathfrak{A}/\sim$ a nazývat *kvocientem $\in$-struktury $\mathfrak{A}$ podle $\sim$*.

Věta 2.2.15. *Nechť $\mathfrak{A}$ je $\in$-struktura a $\sim$ koextenzivní ekvivalence na $\mathfrak{A}$. Pak $\mathfrak{A}/\sim$ je $\in$-struktura. Je-li $\sim$ navíc extenzivní na $\mathfrak{A}$, je $\in$-struktura $\mathfrak{A}/\sim$ extenzionální.*

Dříve než přistoupíme k důkazu věty 2.2.15 dokážeme následující lemma a vyslovíme jeho bezprostřední důsledek.

Lemma 2.2.16. *Nechť $\mathfrak{A}$ je $\in$-struktura a $\sim$ koextenzivní ekvivalence na $\mathfrak{A}$. Kvocientové zobrazení $\pi_\sim$ je surjektivním zobrazením třídy A na $A/\sim$ a pro každé $x \in A$ platí*

$$\{\, y \mid y \in^{A/\sim} \pi_\sim(x) \,\} = \{\, \pi_\sim(y) \mid y \in^A x \,\}.$$

Důkaz. Je zřejmé, že $\pi_\sim$ je surjektivní zobrazení třídy A na $A/\sim$. Buď tedy $x \in A$. Inkluze

$$\{\, y \mid y \in^{A/\sim} \pi_\sim(x) \,\} \supseteq \pi_\sim[x_{\mathfrak{A}}]$$

plyne ihned z definice relace $\in^{A/\sim}$. Nechť $\pi_\sim(y) \in^{A/\sim} \pi_\sim(x)$ pro nějaké $y \in A$. Pak existují $u, v \in A$ tak, že $v \in^A u$, $v \sim y$ a $u \sim x$. Protože $\sim \subseteq \sim^+$, je $u \sim^+ x$, a tedy existuje prvek $z \in^A x$, takový, že $v \sim z$ a speciálně $\pi_\sim(z) = \pi_\sim(v) = \pi_\sim(y)$. Odtud dostáváme $\pi_\sim(y) \in \pi_\sim[x_{\mathfrak{A}}]$, čímž je dokázána i obrácená inkluze. □

Důsledek 2.2.17. *Je-li $\mathfrak{A}$ $\in$-struktura a $\sim$ koextenzivní ekvivalence na $\mathfrak{A}$, pak $\mathfrak{A}/\sim$ je $\in$-struktura a kvocientové zobrazení $\pi_\sim$ je věrné.*

Důkaz věty 2.2.15. Vzhledem k důsledku zbývá prokázat extenzionalitu $\mathfrak{A}/\sim$ v případě, že $\sim$ je extenzivní na $\mathfrak{A}$. Budiž tedy $\sim$ extenzivní na $\mathfrak{A}$ a nechť $(\pi_\sim(x))_{\mathfrak{A}/\sim} = (\pi_\sim(y))_{\mathfrak{A}/\sim}$ pro $x, y \in A$. Potom je podle předchozího lemmatu $\pi_\sim[x_{\mathfrak{A}}] = \pi_\sim[y_{\mathfrak{A}}]$, odkud snadno plyne $x \sim^+ y$. Protože $\sim^+ \subseteq \sim$, platí rovněž $x \sim y$, a tedy $\pi_\sim(x) = \pi_\sim(y)$. □

Důsledek 2.2.18. *Je-li $\mathfrak{A}$ $\in$-struktura, je $\mathfrak{A}/\sim_{\mathfrak{A}}$ extenzionální $\in$-struktura.*

Definice 2.2.19. $\in$-strukturu $\mathfrak{A}/\sim_{\mathfrak{A}}$ budeme nazývat *nejmenším extenzionálním kvocientem $\in$-struktury* $\mathfrak{A}$. Kvocientové zobrazení $\pi_{\sim_{\mathfrak{A}}}$ třídy A podle $\sim_{\mathfrak{A}}$ budeme dále označovat $\pi_{\mathfrak{A}}$.

2.3 Superuniversální struktura

Nyní učiníme zásadní krok v důkazu relativní konzistence axiomu superuniversality sestrojením $\in$-struktury $\mathfrak{U}$, jež nám v následujícím odstavci poslouží jako základ pro interpretaci teorie **UT** v **ZFS₋**. V celém odstavci budeme pracovat v **ZFS₋**.

Definice 2.3.1. Řekneme, že $\in$-struktura $\mathfrak{A}$ je *silně universální*, pokud pro každou tranzitivní podstrukturu $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{A}$ a každé její koncové rozšíření $\mathfrak{b} \geqslant \mathfrak{a}$ existuje $\in$-struktura $\mathfrak{c}$ a zobrazení f tak, že $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{c} \leqslant \mathfrak{A}$ a f je izomorfismus $\in$-struktur $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ identický na a.

Definice 2.3.2. $\in$-strukturu $\mathfrak{A}$ nazveme *superuniversální,* je-li extenzionální a pro každou tranzitivní podstrukturu $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{A}$ a každé její extenzionální koncové rozšíření $\mathfrak{b} \geqslant \mathfrak{a}$ existuje $\in$-struktura $\mathfrak{c}$ a zobrazení f tak, že $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{c} \leqslant \mathfrak{A}$ a f je izomorfismus $\in$-struktur $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ identický na a.

S využitím axiomu silného výběru zkonstruujeme nyní nejmenší $\in$-strukturu $\mathfrak{D}$ splňující následující podmínku:

Podmínka 2.3.3. Je-li $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{D}$ a $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}$ pro nějaké $\in$-struktury $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, pak pro každý prvek $x \in b - a$ platí:

(i) $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, x \rangle \in D$

(ii) $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, x \rangle_{\mathfrak{D}} = (x_{\mathfrak{b}} \cap a) \cup \{ \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, y \rangle \mid y \in x_{\mathfrak{b}} - a \}$.

Vzápětí pak prokážeme, že $\in$-struktura $\mathfrak{D}$ je silně universální a že její nejmenší extenzionální kvocient je superuniversální.

Definice 2.3.4. Zvolme pevně očíslování všech množinových $\in$-struktur $\langle \mathfrak{a}_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{On} \rangle$ tak, aby platilo:

$$(\forall \alpha, \beta_0 \in \mathbf{On})(\exists \beta \geq \beta_0)(\mathfrak{a}_\beta = \mathfrak{a}_\alpha)$$

Pomocí transfinitní indukce definujme posloupnost $\in$-struktur $\langle \mathfrak{d}_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{On} \rangle$ tak, že

(i) $d_0 = \emptyset, \quad \in^{d_0} = \emptyset;$

(ii) je-li $\alpha \in \mathbf{On}$, položíme

$$\begin{aligned} d_{\alpha+1} &= d_\alpha \cup \{ \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}_\alpha, x \rangle \mid \mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{d}_\alpha \ \&\ \mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{a}_\alpha \ \&\ x \in a_\alpha - a \}, \\ \in^{d_{\alpha+1}} &= \in^{d_\alpha} \cup \{ \langle \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}_\alpha, y \rangle, \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}_\alpha, x \rangle \rangle \mid \mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{d}_\alpha \ \&\ \mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{a}_\alpha \ \&\ x \in a_\alpha - a \ \&\ y \in x_{\mathfrak{a}_\alpha} - a \} \cup \\ &\quad \cup \{ \langle y, \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}_\alpha, x \rangle \rangle \mid \mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{d}_\alpha \ \&\ \mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{a}_\alpha \ \&\ x \in a_\alpha - a \ \&\ y \in x_{\mathfrak{a}_\alpha} \cap a \}; \end{aligned}$$

(iii) pro $\lambda \in \mathbf{On}$ limitní položíme

$$d_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} d_\alpha, \quad \in^{d_\lambda} = \bigcup_{\alpha < \lambda} \in^{d_\alpha} .$$

Na závěr položme $D = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{On}} d_\alpha$ a $\in^D = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{On}} \in^{d_\alpha}$.

Všimněme si nyní, že každý prvek třídy D je uspořádanou trojicí, jejíž první dvě složky tvoří množinové $\in$-struktury, a že pro libovolné ordinální číslo γ platí

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, x \rangle \in d_\gamma \Leftrightarrow (\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}) \ \&\ (x \in b - a) \ \&\ (\exists \alpha < \gamma)(\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{d}_\alpha \ \&\ \mathfrak{b} = \mathfrak{a}_\alpha).$$

Je dobré si dále uvědomit, že kdykoli $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, x \rangle \in D$, platí $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, x \rangle \notin a$. V opačném případě totiž existuje nejmenší ordinální číslo α takové, že $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, x \rangle \in d_{\alpha+1}$, tedy $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{d}_\alpha$ (speciálně $a \subseteq d_\alpha$), čili $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, x \rangle \in d_\alpha$. To však vzhledem k definici posloupnosti $\langle \mathfrak{d}_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{On} \rangle$ a volbě čísla α není možné — spor!

Z následujícího lemmatu je mj. zřejmé, že dvojice $\mathfrak{D} = \langle D, \in^D \rangle$ tvoří $\in$-strukturu a že pro každé $\alpha \in \mathbf{On}$ platí $\mathfrak{d}_\alpha \leqslant \mathfrak{D}$.

Lemma 2.3.5. *Pro každá dvě ordinální čísla α, β taková, že $\alpha \leq \beta$, platí $\mathfrak{d}_\alpha \leqslant \mathfrak{d}_\beta$.*

Důkaz. Pro libovolné ordinální číslo γ nejprve dokážeme, že $\mathfrak{d}_\gamma \leqslant \mathfrak{d}_{\gamma+1}$. Buď $x \in d_\gamma$. Inkluze $x_{\mathfrak{d}_\gamma} \subseteq x_{\mathfrak{d}_{\gamma+1}}$ plyne přímo z definice. Naopak, je-li $y \in^{d_{\gamma+1}} x$, stačí vyšetřit případ, kdy $x = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}_\gamma, v \rangle$, $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{d}_\gamma$, $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{a}_\gamma$ a $v \in a_\gamma - a$, přičemž buď

a) $y = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}_\gamma, u \rangle$ a $u \in v_{\mathfrak{a}_\gamma} - a$,

nebo

b) $y \in v_{\mathfrak{a}_\gamma} \cap a$.

Protože však $x \in d_\gamma$, existuje v obou případech $\alpha < \gamma$ takové, že $\mathfrak{a}_\alpha = \mathfrak{a}_\gamma$ a $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{d}_\alpha$, tedy $y \in^{d_{\alpha+1}} x$. Jelikož $\in^{d_{\alpha+1}} \subseteq \in^{d_\gamma}$, je $x_{\mathfrak{d}_\gamma} = x_{\mathfrak{d}_{\gamma+1}}$. Tím je dokázáno, že $\mathfrak{d}_\gamma \leqslant \mathfrak{d}_{\gamma+1}$.

Nechť λ je limitní ordinál. Předpokládejme, že pro každá ordinální čísla $\alpha, \beta < \lambda$ platí

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow \mathfrak{d}_\alpha \leqslant \mathfrak{d}_\beta.$$

Nechť dále $\gamma < \lambda$, $x \in d_\gamma$ a $y \in^{d_\lambda} x$. Podle definice je $\in^{d_\lambda} = \bigcup_{\alpha<\lambda} \in^{d_\alpha}$, a tedy existuje $\alpha < \lambda$ tak, že $y \in^{d_\alpha} x \in d_\alpha$. Vzhledem k předpokladu je zřejmé, že platí buďto $\mathfrak{d}_\alpha \leqslant \mathfrak{d}_\gamma$ nebo $\mathfrak{d}_\gamma \leqslant \mathfrak{d}_\alpha$, a tudíž $y \in^{d_\gamma} x$. Vidíme, že $x_{\mathfrak{d}_\gamma} = x_{\mathfrak{d}_\lambda}$, tedy $\mathfrak{d}_\gamma \leqslant \mathfrak{d}_\lambda$. □

Tvrzení 2.3.6. *$\in$-struktura $\mathfrak{D}$ je nejmenší $\in$-strukturou s vlastností 2.3.3.*

Důkaz. Nechť $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{D}$, $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}$ a $x \in b - a$, kde $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ jsou $\in$-struktury. Předně existuje ordinální číslo γ takové, že $a \subseteq d_\gamma$. Jelikož $\mathfrak{d}_\gamma \leqslant \mathfrak{D}$, platí $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{d}_\gamma$. Dále díky volbě očíslování $\langle \mathfrak{a}_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{On} \rangle$ existuje $\beta > \gamma$ tak, že $\mathfrak{a}_\beta = \mathfrak{b}$. Vzhledem k lemmatu 2.3.5 navíc $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{d}_\beta$, a tudíž podle definice 2.3.4 platí $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, x \rangle \in d_{\beta+1} \subseteq D$ a

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, x \rangle_{\mathfrak{D}} = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, x \rangle_{\mathfrak{d}_{\beta+1}} = (x_{\mathfrak{b}} \cap a) \cup \{ \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, y \rangle \mid y \in x_{\mathfrak{b}} - a \}.$$

Dokázali jsme, že $\in$-struktura $\mathfrak{D}$ splňuje vlastnost 2.3.3. Je snadné nahlédnout, že pro každou $\in$-strukturu $\mathfrak{A}$ s vlastností 2.3.3 a každé ordinální číslo platí $\mathfrak{d}_\alpha \leqslant \mathfrak{A}$, a tedy $\mathfrak{D} \leqslant \mathfrak{A}$. □

Věta 2.3.7. *$\in$-struktura $\mathfrak{D}$ je silně universální.*

Důkaz. Nechť $\mathfrak{a}$ je tranzitivní podstruktura v $\mathfrak{D}$ a nechť $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}$ pro nějakou $\in$-strukturu $\mathfrak{b}$. Definujme zobrazení $f\colon b \to D$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in a, \\ \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, x \rangle & x \in b - a. \end{cases}$$

Vzhledem k vlastnosti 2.3.3 je zřejmé, že $f(x) \in D$ pro každé $x \in b$. Jak jsme již zmínili, platí $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, x \rangle \notin a$, kdykoli $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, x \rangle \in D$, a je tedy snadné nahlédnout, že zobrazení f je prosté. Z vlastnosti 2.3.3 dále pro každé $x \in b$ okamžitě vyplývá $(f(x))_{\mathfrak{D}} = \{ f(y) \mid y \in x_{\mathfrak{b}} \}$. Označíme-li $\mathfrak{c} = \mathfrak{D}|_{\mathrm{Rng}(f)}$, dostáváme speciálně $\mathfrak{c} \leqslant \mathfrak{D}$. Zobrazení f je přitom zřejmě izomorfismem $\in$-struktur $\mathfrak{b}$ a $\mathfrak{c}$ identickým na a. □

Označme $\mathfrak{U}$ nejmenší extenzionální kvocient $\in$-struktury $\mathfrak{D}$, tj. $\mathfrak{U} = \mathfrak{D}/{\sim_{\mathfrak{D}}}$. Podle věty 2.2.15 je $\mathfrak{U}$ extenzionální $\in$-struktura.

Věta 2.3.8. *$\in$-struktura $\mathfrak{U}$ je superuniversální.*

Důkaz. Nechť $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{U}$ a $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}$, kde $\mathfrak{b}$ je extenzionální $\in$-struktura. Nechť $\pi_{\mathfrak{D}}$ je kvocientové zobrazení třídy D podle $\sim_{\mathfrak{D}}$. Z definice kvocientové třídy $U = D/{\sim_{\mathfrak{D}}}$ plyne $U \subseteq D$, a tedy $a \subseteq D$. Položme $\mathfrak{a}' = \mathbf{TC}_{\mathfrak{D}}(a)$. Zřejmě $\mathfrak{a}' \leqslant \mathfrak{D}$ a je snadné nahlédnout, že $\pi_{\mathfrak{D}} \restriction a'$ je věrné zobrazení $\in$-struktury $\mathfrak{a}'$ na $\mathfrak{a}$. Zvolme nyní pevně množinu d a zobrazení g_0 tak, aby $d \cap a' = \emptyset$ a g_0 bylo vzájemně jednoznačné zobrazení množiny d na $b - a$. Označme $b' = d \cup a'$ a položme

$$x \in^{b'} y \Leftrightarrow \begin{cases} x \in^{a'} y & \text{pro } x, y \in a', \\ \pi_{\mathfrak{D}}(x) \in^{b} g_0(y) & \text{pro } x \in a', y \in d, \\ g_0(x) \in^{b} g_0(y) & \text{pro } x, y \in d. \end{cases}$$

Dvojice $\langle b', \in^{b'} \rangle$ tvoří $\in$-strukturu $\mathfrak{b}'$ a platí $\mathfrak{a}' \leqslant \mathfrak{b}'$. Označme $g = g_0 \cup (\pi_{\mathfrak{D}} \restriction a')$. Je zřejmé, že $g \colon b' \to b$ je věrné zobrazení struktury $\mathfrak{b}'$ na $\mathfrak{b}$.

Protože $\in$-struktura $\mathfrak{D}$ je silně universální, existuje její tranzitivní podstruktura $\mathfrak{c}' \leqslant \mathfrak{D}$ taková, že $\mathfrak{a}' \leqslant \mathfrak{c}'$ a existuje izomorfismus h $\in$-struktur $\mathfrak{c}'$ a $\mathfrak{b}'$, identický na a'. Nechť c označuje množinu $\pi_{\mathfrak{D}}[c']$ a $\mathfrak{c} = \mathfrak{U}|_c$ Protože $\mathfrak{a}' \leqslant \mathfrak{c}' \leqslant \mathfrak{D}$ a $\pi_{\mathfrak{D}}$ je věrné zobrazení $\in$-struktury $\mathfrak{D}$ na $\mathfrak{U}$, je $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{c} \leqslant \mathfrak{U}$. Stačí nyní ukázat, že $\in$-struktury $\mathfrak{c}$ a $\mathfrak{b}$ jsou izomorfní.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D} \arrow[d, shift left, "\pi_{\mathfrak{D}}"] & \geqslant & \mathfrak{c}' \arrow[rrrr, bend left, "h", "\text{izomorfismus}"'] & \geqslant & \mathfrak{a}' \arrow[d, "\pi_{\mathfrak{D}} \restriction a'"] & \leqslant & \mathfrak{b}' \arrow[d, "g"] & \supseteq & d \arrow[d, "g_0"] \\
\mathfrak{U} \arrow[u, shift left, "\mathbf{Id}_U"] & \geqslant & \mathfrak{c} \arrow[u, "\rho"] \arrow[rrrr, bend right, "f = g \circ h \circ \rho", "\text{izomorfismus}"'] & \geqslant & \mathfrak{a} & \leqslant & \mathfrak{b} & \supseteq & b - a
\end{tikzcd}$$

Dokažme předně, že díky extenzionalitě $\in$-struktury $\mathfrak{b}$ platí pro všechna $x, y \in c'$:

$$\pi_{\mathfrak{D}}(x) = \pi_{\mathfrak{D}}(y) \Leftrightarrow g(h(x)) = g(h(y)). \tag{2.1}$$

Buď R relace definovaná na množině b' předpisem $u \, R \, v \Leftrightarrow g(u) = g(v)$. Pak z $u \, R^+ \, v$ vyplývá $\{ g(u') \mid u' \in u_{\mathfrak{b}'} \} = \{ g(v') \mid v' \in v_{\mathfrak{b}'} \}$, a tedy $(g(u))_{\mathfrak{b}} = (g(v))_{\mathfrak{b}}$, neboť zobrazení g je věrné. Jelikož $\mathfrak{b}$ je extenzionální $\in$-struktura, plyne z $u \, R^+ \, v$ dokonce $g(u) = g(v)$, tj. $u \, R \, v$. Vidíme, že R je reflexivní a extenzivní relace na $\mathfrak{b}'$. Buďte nyní $x, y \in c'$ takové, že $\pi_{\mathfrak{D}}(x) = \pi_{\mathfrak{D}}(y)$. Potom $x \sim_{\mathfrak{D}} y$, tedy i $x \sim_{\mathfrak{c}'} y$ a podle 2.2.12 $h(x) \sim_{\mathfrak{b}'} h(y)$. Podle 2.2.6 je pak $h(x) \, R \, h(y)$, čili $g(h(x)) = g(h(y))$.

Nechť naopak $g(h(x)) = g(h(y))$ pro $x, y \in c'$. Máme ukázat, že $\pi_{\mathfrak{D}}(x) = \pi_{\mathfrak{D}}(y)$. Pokud $g(h(x)) \in a$, je $h(x), h(y) \in a'$, $h(x) = x$ a $h(y) = y$, a tedy $g(x) = \pi_{\mathfrak{D}}(x) = \pi_{\mathfrak{D}}(y) = g(y)$. V případě, že $g(h(x)) \in b - a$, je $h(x), h(y) \in d = b' - a'$ a $g(h(x)) = g_0(h(x)) = g_0(h(y)) = g(h(y))$. Zobrazení $g_0 \circ h$ je prosté, a tedy $x = y$. Odtud bezpochyby plyne i $\pi_{\mathfrak{D}}(x) = \pi_{\mathfrak{D}}(y)$.

Z axiomu výběru vyplývá, že existuje zobrazení $\rho \colon c \to c'$ takové, že pro každé $x \in c$ platí $\pi_{\mathfrak{D}}(\rho(x)) = x$ a je-li $x \in a$, platí $\rho(x) = x$. Na základě (2.1) se již snadno ověří, že zobrazení $f \colon c \to b$ definované jako složení $f = g \circ h \circ \rho$ je izomorfismem $\in$-struktur $\mathfrak{c}$ a $\mathfrak{b}$ identickým na a. $\square$

2.4 Konzistence universální teorie

Definice 2.4.1. Řekneme, že extenzionální $\in$-struktura $\mathfrak{A}$ je *úplná*, pokud pro každou množinu $a \subseteq A$ existuje (právě jeden) prvek $w \in A$ tak, že $a = w_{\mathfrak{A}}$. Tento jednoznačně určený prvek pro množinu a budeme dále značit $a^{\mathfrak{A}}$.

Definice 2.4.2. Buď $\mathfrak{A}$ $\in$-struktura definovaná v teorii $\mathbf{T}$ rozšiřující $\mathbf{ZF}_{-}$. Pomocí $\in$-struktury $\mathfrak{A}$ definujme interpretaci * jazyka $<\in>$ v $\mathbf{T}$:

(i) Za universum interpretace * zvolme třídu A;

(ii) jediný binární predikát $\in$ jazyka $<\in>$ interpretujme pomocí binární relace $\in^A$ tak, že pro $u, v \in \mathfrak{A}$ je $u \in {}^*v \Leftrightarrow u \in^A v$.

Interpretaci * nazýváme kanonickou $\mathfrak{A}$-interpretací jazyka $<\in>$ v $\mathbf{T}$.

Věta 2.4.3 (Rieger). *Nechť $\mathfrak{A}$ je úplná $\in$-struktura v teorii $\mathbf{T}$ rozšiřující $\mathbf{ZF}$ a nechť * značí kanonickou $\mathfrak{A}$-interpretaci jazyka $<\in>$ v $\mathbf{T}$. Pak * je interpretací teorie $\mathbf{ZF}_{-}$ v $\mathbf{T}$.*

Důkaz. Prokážeme platnost jednotlivých axiomů teorie $\mathbf{ZF}_{-}$ v interpretaci *.

Axiom extenzionality. Nechť $u, v \in A$ a nechť platí

$$[(\forall x)(x \in u \Leftrightarrow x \in v)]^*.$$

Pak $u_{\mathfrak{A}} = v_{\mathfrak{A}}$ a díky extenzionalitě $\in$-struktury $\mathfrak{A}$ platí $u = v$ (tedy i $(u = v)^*$).

Axiom dvojice. Buďte $u, v \in A$. Pak existuje prvek $w = \{u, v\}^{\mathfrak{A}} \in A$, pro který zřejmě platí

$$(v \in w \;\&\; u \in w)^*.$$

Axiom sjednocení. Nechť $u \in A$. Označme a sjednocení množiny $\{\, v_{\mathfrak{A}} \mid v \in u_{\mathfrak{A}} \,\}$. Pak $a \subseteq A$ a pro $w = a^{\mathfrak{A}} \in A$ platí

$$[(\forall x \in u)(\forall y \in x)(y \in w)]^*.$$

Axiom potence. Buď $u \in A$. Položme $a = \{\, b^{\mathfrak{A}} \mid b \in \mathscr{P}(u_{\mathfrak{A}}) \,\}$ a $w = a^{\mathfrak{A}} \in A$. Podobně jako v předešlých případech se snadno nahlédne, že platí

$$[(\forall x)((\forall y \in x)(y \in u) \Rightarrow x \in w)]^*.$$

Axiom nekonečna. Definujme indukcí posloupnost $\langle a_n \mid n \in \omega \rangle$ tak, že $a_0 = \emptyset$ a $a_{n+1} = a_n \cup \{(a_n)^{\mathfrak{A}}\}$ a označme $a = \bigcup_{n \in \omega} a_n$. Položíme-li nyní $w = a^{\mathfrak{A}} \in A$, platí

$$[\emptyset \in w \;\&\; (\forall x \in w)(x \cup \{x\} \in w)]^*.$$

Schéma axiomů vydělení. Nechť $u \in A$ a nechť φ je formule jazyka $<\in>$ s volnou proměnnou x a případně nějakými parametry z třídy A. Označme $a = \{\, v \in u_{\mathfrak{A}} \mid \varphi^*(v) \,\}$ a položme opět $w = a^{\mathfrak{A}} \in A$; pak platí

$$[(\forall x)(x \in w \Leftrightarrow (x \in u \;\&\; \varphi))]^*.$$

Schéma axiomů nahrazení. Nechť $u \in A$ a nechť φ je formule jazyka $<\in>$ s volnými proměnnými x, y a případně nějakými parametry z třídy A. Pokud

$$[(\forall x)(\forall y)(\forall z)((\varphi \;\&\; \varphi(y/z)) \Rightarrow y = z)]^*,$$

pak podle axiomu nahrazení existuje množina a taková, že

$$(\forall x)(x \in a \Leftrightarrow (\exists y)(y \in u_{\mathfrak{A}} \mathbin{\&} y \in A \mathbin{\&} \varphi^*(x,y)].$$

Položme $w = a^{\mathfrak{A}}$. Pak

$$[(\forall y)(y \in w \Leftrightarrow (\exists x \in u)\varphi]^*.$$

□

Lemma 2.4.4. *Buď $\mathfrak{A}$ úplná $\in$-struktura definovaná v* $\mathbf{ZFS_-}$ *a * kanonická $\mathfrak{A}$-interpretace teorie* $\mathbf{ZF_-}$ *v* $\mathbf{ZFS_-}$. *Interpretaci * lze rozšířit do interpretace teorie* $\mathbf{ZFS_-}$ *v* $\mathbf{ZFS_-}$.

Důkaz. Označme $\mathbf{On}^{\mathfrak{A}}$ třídu $\{ u \in \mathfrak{A} \mid [u \text{ je ordinální číslo}]^* \}$ všech ordinálních čísel ve smyslu $\mathfrak{A}$-interpretace *. Je zřejmé, že $\mathbf{On}^{\mathfrak{A}}$ je vlastní třída. V opačném případě by totiž existoval prvek $w \in A$ takový, že $w_{\mathfrak{A}} = \mathbf{On}^{\mathfrak{A}}$, a platilo by tudíž

$$[(\exists x)(\forall y)(y \text{ je ordinální číslo} \Rightarrow y \in x)]^*.$$

To však není možné, protože * je podle předchozí věty interpretací teorie $\mathbf{ZF_-}$.

Na základě axiomu silného výběru lze tedy sestrojit formuli φ jazyka $<\in,\mathcal{C}>$ volných proměnných x, y reprezentující vzájemně jednoznačné zobrazení třídy A na třídu $\mathbf{On}^{\mathfrak{A}}$. Rozšíříme-li nyní interpretaci * do interpretace jazyka $<\in,\mathcal{C}>$ tak, že pro $u, v \in A$ položíme

$$u = \mathcal{C}^* v \Leftrightarrow \varphi(v,u),$$

získáme interpretaci teorie $\mathbf{ZFS_-}$ v $\mathbf{ZFS_-}$. □

Lemma 2.4.5. *Každá superuniversální $\in$-struktura $\mathfrak{A}$ je úplná.*

Důkaz. Nechť $a \subseteq A$. Položme $\mathfrak{b} = \mathbf{TC}_{\mathfrak{A}}(a)$. Můžeme předpokládat, že $a \neq u_{\mathfrak{b}}$ pro každé $u \in b$, neboť v opačném případě není co dokazovat. Nechť w je libovolná množina, která není prvkem b. Na množině $b' = b \cup \{w\}$ definujme binární relaci $\in^{b'}$ následovně

$$\in^{b'} = \in^{b} \cup \{ \langle u, w \rangle \mid u \in a \}.$$

Dvojice $\langle b', \in^{b'} \rangle$ tvoří extenzionální $\in$-strukturu $\mathfrak{b}'$, která je koncovým rozšířením $\in$-struktury $\mathfrak{b}$. Protože $\mathfrak{A}$ je superuniversální, existuje $v \in A$ tak, že $v_{\mathfrak{A}} = w_{\mathfrak{b}'} = a$. □

Věta 2.4.6. *Teorii* $\mathbf{UT}$ *lze interpretovat v* $\mathbf{ZFS_-}$.

Důkaz. Víme, že $\in$-struktura $\mathfrak{U}$ je superuniversální a díky předchozímu lemmatu i úplná. Uvažujme interpretaci * teorie $\mathbf{ZFS_-}$ v $\mathbf{ZFS_-}$ získanou rozšířením kanonické $\mathfrak{U}$-interpretace na základě lemmatu 2.4.4. Stačí ukázat, že v této interpretaci platí axiom superuniversality. Nechť $t, a, r \in U$ a nechť platí

$$[t \text{ je tranzitivní množina} \mathbin{\&} \langle a, r \rangle \text{ je extenzionální } \in\text{-struktura} \mathbin{\&} \langle t, \in_t \rangle \leqslant \langle a, r \rangle]^*.$$

Označme $\mathfrak{t}' = \mathfrak{U}|_{t_{\mathfrak{U}}}$; pak $\mathfrak{t}' \leqslant \mathfrak{U}$. Definujme $\in$-strukturu $\mathfrak{a}'$ takto:

(i) $a' = a_{\mathfrak{U}}$,

(ii) $\in^{a'} = \{ \langle u, v \rangle \mid (u \, r \, v)^* \}$.

Je jasné, že dvojice $\mathfrak{a}' = \langle a', \in^{a'} \rangle$ tvoří extenzionální $\in$-strukturu, pro kterou platí $\mathfrak{t}' \leqslant \mathfrak{a}'$. Protože $\mathfrak{t}' \leqslant \mathfrak{U}$, plyne ze superuniversality $\in$-struktury $\mathfrak{U}$ existence $\in$-struktury $\mathfrak{b}'$ a zobrazení f' tak, že $\mathfrak{t}' \leqslant \mathfrak{b}' \leqslant \mathfrak{U}$ a f' je izomorfismus $\in$-struktur $\mathfrak{a}'$ a $\mathfrak{b}'$, identický na t'. Protože $b' \subseteq U$, existuje $b \in U$ tak, že $b' = b_{\mathfrak{U}}$. Navíc platí

$$[b \text{ je tranzitivní množina } \ \& \ t \subseteq b]^*.$$

Pro každé dva prvky $u, v \in U$ označme symbolem $\langle u, v \rangle^*$ prvek $w \in U$ takový, že

$$[w = \langle u, v \rangle]^*,$$

a položme na závěr $f = \{\, \langle u, v \rangle^* \mid \langle u, v \rangle \in f' \,\}^{\mathfrak{A}}$. Snadno se nyní ověří, že platí

$$[f \text{ je izomorfismus } \in\text{-struktur } \langle a, r \rangle \text{ a } \langle b, \in_b \rangle \text{ identický na } t]^*.$$

□

Poznámka 2.4.7. Relativní konzistence axiomu silného výběru vůči **ZF** je známá. Axiom silného výběru lze dokázat například v tzv. universu konstruovatelných množin **L**, které je modelem (interpretací) Zermelo-Fraenkelovy teorie množin v každém rozšíření **ZF**$_{\mathbf{-}}$ (viz [2]).

Důsledek 2.4.8. *Teorie* **UT** *je konzistentní, je-li* **ZF**$_{\mathbf{-}}$ *konzistentní.*

Následující věta formuluje konzervativnost teorie **ZFS** vůči **ZFC**:

Věta 2.4.9. *Je-li φ formule jazyka $<\in>$, pak*

$$\mathbf{ZFC} \vdash \varphi \text{ právě když } \mathbf{ZFS} \vdash \varphi.$$

Důkaz věty 2.4.9 lze nalézt v [7].

Definice 2.4.10. Je-li φ libovolná formule jazyka $<\in>$ a X třída, nechť φ^X označuje formuli, která vznikne z formule φ omezením všech jejích kvantifikátorů do X; φ^X tedy získáme z φ nahrazením každé podformule formule φ tvaru $(\exists x)\psi$ formulí $(\exists x)(x \in X \ \& \ \psi)$ a každé podformule tvaru $(\forall x)\psi$ formulí $(\forall x)(x \in X \Rightarrow \psi)$.

Věta 2.4.11. *Buď φ formule jazyka $<\in>$. Pak*

$$\mathbf{UT} \vdash \varphi^{\mathbf{WF}} \text{ právě když } \mathbf{ZFC} \vdash \varphi.$$

Důkaz. Nechť φ je formule jazyka $<\in>$. Pak **ZFC** $\vdash \varphi$ právě tehdy, když **ZFC**$_{\mathbf{-}}$ $\vdash \varphi^{\mathbf{WF}}$. Protože v teorii **UT** platí všechny axiomy teorie **ZFC**$_{\mathbf{-}}$, je implikace zprava doleva dokazované ekvivalence triviální. Předpokládejme, že **UT** $\vdash \varphi^{\mathbf{WF}}$. Buď * kanonická $\mathfrak{U}$-interpretace teorie **UT** v **ZFS**$_{\mathbf{-}}$. Pak **ZFS**$_{\mathbf{-}}$ $\vdash (\varphi^{\mathbf{WF}})^*$. Následující úvahu provedeme v **ZFS**$_{\mathbf{-}}$:

Označme $\mathbf{WF}^{\mathfrak{U}}$ třídu $\{\, x \in U \mid (x \in WF)^* \,\}$ a E restrikci relace $\in^U$ na $\mathbf{WF}^{\mathfrak{U}}$. Snadno se nahlédne, že E je úzká, extenzionální a fundovaná relace na třídě $\mathbf{WF}^{\mathfrak{U}}$. Podle Mostowského věty o kolapsu existuje právě jedna tranzitivní třída $M \subseteq \mathbf{WF}$ taková, že $\in$-struktury $\langle \mathbf{WF}^{\mathfrak{U}}, E \rangle$ a $\langle M, \in_M \rangle$ jsou izomorfní. Snadno se nahlédne, že $\in$-struktura $\langle \mathbf{WF}^{\mathfrak{U}}, E \rangle$ je úplná. Třída M je tedy kotranzitivní a $M = \mathbf{WF}$. Vidíme, že $\in$-struktury $\langle \mathbf{WF}^{\mathfrak{U}}, E \rangle$ a $\langle \mathbf{WF}, \in_{\mathbf{WF}} \rangle$ jsou izomorfní.

Tedy **ZFS**$_{\mathbf{-}}$ $\vdash \varphi^{\mathbf{WF}}$. Nyní se stačí opřít o větu 2.4.9, abychom nahlédli, že **ZFC** $\vdash \varphi$. □

Tato věta podstatným způsobem zesiluje tvrzení důsledku 2.4.8. Kromě relativní konzistence teorie **UT** vůči **ZF₋** zaručuje relativní konzistenci řady dalších rozšíření **UT**. Přesněji to formuluje následující bezprostřední důsledek.

Důsledek 2.4.12. *Buď φ formule jazyka $<\in>$ taková, že $\mathbf{ZF}_{-}+\varphi$ je konzistentní. Pak je rovněž $\mathbf{UT}+\varphi^{\mathbf{WF}}$ konzistentní. Jestliže navíc $\mathbf{UT} \vdash (\varphi^{\mathbf{WF}} \Rightarrow \varphi)$, je konzistentní i $\mathbf{UT}+\varphi$.*

Příklad 2.4.13. **UT**+GCH je relativně konzistentní vůči $\mathbf{ZF}_{-}$.

Věta 2.4.11 má ještě jeden nezanedbatelný význam. Ukazuje totiž, že pro „běžnou“ matematiku (nezabývající se detailně vnitřní strukturou množin) není mezi teoriemi **UT** a **ZFC** rozdílu. Dokážeme-li tak v **UT** např. nějaké tvrzení o reálných číslech, bude toto tvrzení patrně platit i ve **WF**, a tudíž bude dokazatelné v **ZFC**. Tento fakt může být velmi užitečný zejména tehdy, budeme-li se chtít při důkazu takových tvrzení opřít o aparát nestandardních metod, který lze v **UT** výhodně vybudovat (viz kap. 4).

2.5 Vlastnosti superuniversálních $\in$-struktur

Tvrzení 2.5.1. *Pro libovolnou extenzionální $\in$-strukturu $\mathfrak{A}$ je ekvivalentní:*

(i) $\mathfrak{A}$ je superuniversální

(ii) Nechť $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ jsou extenzionální $\in$-struktury takové, že $\mathfrak{b}_1 \leqslant \mathfrak{b}_2$, a nechť i_1 je vnoření $\in$-struktury $\mathfrak{b}_1$ do $\mathfrak{A}$. Pak existuje vnoření i_2 $\in$-struktury $\mathfrak{b}_2$ do $\mathfrak{A}$ takové, že $i_1 \subseteq i_2$.

(iii) Nechť $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ jsou extenzionální $\in$-struktury a i_1 izomorfismus $\in$-struktur $\mathfrak{b}_1$ a $\mathfrak{a}_1$. Nechť dále platí $\mathfrak{a}_1 \leqslant \mathfrak{A}$ a $\mathfrak{b}_1 \leqslant \mathfrak{b}_2$. Pak existuje $\in$-struktura $\mathfrak{a}_2$ a izomorfismus i_2 $\in$-struktur $\mathfrak{b}_2$ a $\mathfrak{a}_2$ tak, že $\mathfrak{a}_1 \leqslant \mathfrak{a}_2 \leqslant \mathfrak{A}$ a $i_1 \subseteq i_2$.

Důkaz. Tvrzení (ii) je pouhou reformulací tvrzení (iii), kde $a_1 = \mathrm{Rng}(i_1)$ a $a_2 = \mathrm{Rng}(i_2)$. Stačí proto dokázat ekvivalenci (i)$\Leftrightarrow$(iii). Implikace (iii)$\Rightarrow$(i) je zřejmá. Předpokládejme, že platí (i). Nechť jsou dány $\in$-struktury $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ a izomorfismus i_1 $\in$-struktur $\mathfrak{b}_1$ a $\mathfrak{a}_1$ a nechť platí $\mathfrak{a}_1 \leqslant \mathfrak{A}$ a $\mathfrak{b}_1 \leqslant \mathfrak{b}_2$. Zvolme libovolné prosté zobrazení f tak, aby $\mathrm{Dom}(f) = b_2 - b_1$ a $\mathrm{Rng}(f) \cap$ $\cap\, a_1 = \emptyset$, a označme $g = f \cup i_1$. Je zřejmé, že g je prosté zobrazení definované na množině b_2. Položme $a = \mathrm{Rng}(g)$ a $\in^a = \{\, \langle g(x), g(y) \rangle \mid x \in^{b_2} y \,\}$. Snadno se nahlédne, že zobrazení g je izomorfismem $\in$-struktur $\mathfrak{b}_2$ a $\mathfrak{a} = \langle a, \in^a \rangle$ a že platí $\mathfrak{a}_1 \leqslant \mathfrak{a}$. Podle (i) existuje $\in$-struktura $\mathfrak{a}_2$ a izomorfismus h $\in$-struktur $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{a}_2$ identický na množině a_1 tak, že $\mathfrak{a}_1 \leqslant \mathfrak{a}_2 \leqslant \mathfrak{A}$. Položme $i_2 = h \circ g$. Je zřejmé, že i_2 je izomorfismus $\in$-struktur $\mathfrak{b}_2$ a $\mathfrak{a}_2$ a $i_1 \subseteq i_2$. □

Ve zbytku tohoto odstavce budeme pracovat v $\mathbf{ZFS}_{-}$.

Věta 2.5.2. *Pro libovolnou extenzionální $\in$-strukturu $\mathfrak{A}$ je ekvivalentní:*

(i) $\mathfrak{A}$ je superuniversální.

(ii) Nechť $\mathfrak{a}, \mathfrak{B}$ jsou extenzionální $\in$-struktury takové, že $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{A}$, $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{B}$. Pak existuje $\in$-struktura $\mathfrak{C}$ taková, že $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{C} \leqslant \mathfrak{A}$, a izomorfismus F $\in$-struktur $\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{C}$ identický na a.

(iii) Nechť $\mathfrak{b}, \mathfrak{B}$ jsou extenzionální $\in$-struktury takové, že $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{B}$, a nechť i je vnoření $\in$-struktury $\mathfrak{b}$ do $\mathfrak{A}$. Pak existuje vnoření I $\in$-struktury $\mathfrak{B}$ do $\mathfrak{A}$ takové, že $i \subseteq I$.

(iv) Nechť $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{B}$ jsou extenzionální $\in$-struktury a i izomorfismus $\in$-struktur $\mathfrak{b}$ a $\mathfrak{a}$. Nechť dále platí $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{A}$ a $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{B}$. Pak existuje $\in$-struktura $\mathfrak{C}$ a izomorfismus I $\in$-struktur $\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{C}$ tak, že $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{C} \leqslant \mathfrak{A}$ a $i \subseteq I$.

Důkaz. Důkaz ekvivalence posledních tří tvrzení je zcela analogický důkazu předchozí věty a obejde se, stejně jako triviální implikace (ii)⇒(i), bez použití silného výběru. Dokážeme pouze implikaci (i)⇒(ii). Nechť $\mathfrak{A}$ je superuniversální $\in$-struktura a nechť $\mathfrak{a}, \mathfrak{B}$ jsou $\in$-struktury splňující $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{A}$ a $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{B}$. V případě, že B je množina, není co dokazovat. Nechť B je vlastní třída. Díky axiomu silného výběru lze B psát ve tvaru $B = \{ u_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{On} \}$. Definujme posloupnost $\in$-struktur $\langle \mathfrak{b}_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{On} \rangle$ následovně:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{b}_0 &= \mathfrak{a}, \\
\mathfrak{b}_{\alpha+1} &= \mathbf{TC}_{\mathfrak{B}}(b_\alpha \cup \{u_\alpha\}), && \text{pro } \alpha \in \mathbf{On}, \\
\mathfrak{b}_\lambda &= \mathfrak{B}|_{\bigcup_{\alpha\in\lambda} b_\alpha}, && \text{pro } \lambda \in \mathbf{On} \text{ limitní},
\end{aligned}$$

Potom $B = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{On}} b_\alpha$ a platí $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}_0 \leqslant \ldots \leqslant \mathfrak{b}_\alpha \leqslant \ldots \leqslant \mathfrak{B}$. Na základě 2.5.1 (ii) můžeme nyní sestrojit posloupnost zobrazení $\langle i_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{On} \rangle$ tak, aby platilo

(i) $i_0 = \mathbf{Id} \restriction b_0$

(ii) $i_\lambda = \bigcup_{\alpha\in\lambda} i_\alpha$ pro $\lambda \in \mathbf{On}$ limitní

(iii) $i_{\alpha+1} = i$ pro $\alpha \in \mathbf{On}$, kde i je vnoření $\in$-struktury $\mathfrak{b}_{\alpha+1}$ do $\mathfrak{A}$ takové, že $i_\alpha \subseteq i$ a $\mathbf{C}(i)$ je nejmenší možné.

Je zřejmé, že pro každé $\alpha \in \mathbf{On}$ je i_α vnoření $\in$-struktury $\mathfrak{b}_\alpha$ do $\mathfrak{A}$. Označíme-li navíc $I = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{On}} i_\alpha$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}|_{\mathrm{Rng}(I)}$, je I izomorfismus $\in$-struktur $\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{C} \leqslant \mathfrak{A}$ identický na $b_0 = = a$. □

Věta 2.5.3. *Každé dvě superuniversální $\in$-struktury jsou izomorfní.*

Důkaz. Buďte $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ dvě superuniversální $\in$-struktury. Díky axiomu silného výběru existují očíslování tříd A, B tvaru $A = \{ u_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{On} \}$ a $B = \{v_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{On} \}$. Definujme posloupnost zobrazení $\langle i_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{On} \rangle$ tak, aby pro každé $\alpha \in \mathbf{On}$ platilo:

(i) $\mathrm{Dom}(i_\alpha) = a_\alpha$ pro nějaké $\mathfrak{a}_\alpha \leqslant \mathfrak{A}$,

(ii) $\mathrm{Rng}(i_\alpha) = b_\alpha$ pro nějaké $\mathfrak{b}_\alpha \leqslant \mathfrak{B}$,

(iii) i_α je izomorfismus $\in$-struktur $\mathfrak{a}_\alpha$ a $\mathfrak{b}_\alpha$.

(iv) $u_\alpha \in a_{\alpha+1}$, $v_\alpha \in b_{\alpha+1}$,

(v) $i_\beta \subseteq i_\alpha$, pro každé $\beta \leq \alpha$

Položme $i_0 = \emptyset$. Je zřejmé, že i_0 vyhovuje podmínkám (i)–(v). Je-li již definováno zobrazení i_α s vlastnostmi (i)–(v), označme $\mathfrak{b}'_\alpha = \mathbf{TC}_{\mathfrak{B}}(b_\alpha \cup \{v_\alpha\})$. Pak $\mathfrak{b}_\alpha \leqslant \mathfrak{b}'_\alpha$ a i_α^{-1} je izomorfismus $\in$-struktur $\mathfrak{b}_\alpha$ a $\mathfrak{a}_\alpha$. Podle 2.5.1 (iii) tudíž existuje $\in$-struktura $\mathfrak{a}'_\alpha$ a izomorfismus j_α $\in$-struktur $\mathfrak{b}'_\alpha$ a $\mathfrak{a}'_\alpha$ tak, že $\mathfrak{a}_\alpha \leqslant \mathfrak{a}'_\alpha \leqslant \mathfrak{A}$ a $i_\alpha^{-1} \subseteq j_\alpha$. Zobrazení j_α^{-1} je jistě izomorfismem $\in$-struktur $\mathfrak{a}'_\alpha$

a $\mathfrak{b}'_\alpha$. Položme $\mathfrak{a}_{\alpha+1} = \mathbf{TC}_{\mathfrak{A}}(a'_\alpha \cup \{u_\alpha\})$. Pak $\mathfrak{a}'_\alpha \leqslant \mathfrak{a}_{\alpha+1}$ a opětovnou aplikací tvrzení 2.5.1 (iii) získáme $\in$-strukturu $\mathfrak{b}_{\alpha+1}$ takovou, že $\mathfrak{b}'_\alpha \leqslant \mathfrak{b}_{\alpha+1} \leqslant \mathfrak{B}$, a izomorfismus $i_{\alpha+1} \supseteq j_\alpha^{-1} \supseteq i_\alpha$ $\in$-struktur $\mathfrak{a}_{\alpha+1}$ a $\mathfrak{b}_{\alpha+1}$. Snadno se ověří, že $i_{\alpha+1}$ splňuje podmínky (i)–(v). Je-li λ limitní ordinál a jsou-li již sestrojena zobrazení i_α pro $\alpha < \lambda$, stačí položit $i_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} i_\alpha$.

Transfinitní rekurzí jsme právě sestrojili posloupnost zobrazení $\langle i_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{On}\rangle$ splňujících podmínky (i)–(v). Nechť $I = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{On}} i_\alpha$. Z (v) plyne, že I je zobrazení a podle (iv) je $\mathrm{Dom}(I) = A$ a $\mathrm{Rng}(I) = B$. Podmínky (i),(ii),(iii) navíc zaručují, že zobrazení I je izomorfismem $\in$-struktur $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$. □

2.6 Princip universality

V universální teorii tvoří universum množin $\langle \mathbf{V}, \in_\mathbf{V}\rangle$ superuniversální $\in$-strukturu, a je tedy podle 2.5.3 izomorfní každé superuniversální $\in$-struktuře v **UT**. Víme navíc, že superuniversální $\in$-strukturu lze zkonstruovat v libovolném rozšíření **ZFS₋** a že každá superuniversální $\in$-struktura je interpretací teorie **UT**. Studium vlastností superuniversálních struktur lze tak omezit na studium vlastností universa množin v teorii **UT**. Všechna tvrzení předchozího odstavce můžeme v **UT** formulovat i pro universum množin. Z důvodu stručnosti tak učiníme jen v případě následující věty. Od této chvíle budeme pracovat pouze v **UT**.

Věta 2.6.1. *Nechť t je tranzitivní množina a $\mathfrak{A}$ extenzionální $\in$-struktura taková, že platí $\langle t, \in_t\rangle \leqslant \mathfrak{A}$. Potom existuje tranzitivní třída $T \supseteq t$ a izomorfismus F $\in$-struktur $\mathfrak{A}$ a $\langle T, \in_T\rangle$, který je identický na t.*

Důkaz. Z axiomu superuniversality bezprostředně vyplývá, že $\in$-struktura $\langle \mathbf{V}, \in_\mathbf{V}\rangle$ je superuniversální. Dokazovaná věta je tudíž důsledkem 2.5.2 (ii). □

Zvolíme-li v předchozí větě $t = \emptyset$, získáme následující důsledek, který někdy nazýváme *principem universality.*

Důsledek 2.6.2 (Princip universality). *Pro každou extenzionální $\in$-strukturu $\mathfrak{A}$ existuje tranzitivní třída T tak, že $\mathfrak{A} \cong \langle T, \in_T\rangle$.*

Princip universality je zobecněním existenční části Mostowského věty o kolapsu. Na rozdíl od ní nepožaduje, aby relace $\in^A$ byla fundovaná. Pochopitelně zde není zaručena jednoznačnost, tedy to, že třída T je jedinou tranzitivní třídou, která spolu s příslušnou restrikcí relace $\in_\mathbf{V}$ tvoří $\in$-strukturu izomorfní $\mathfrak{A}$. V 3.3.3 ukážeme, že princip universality je slabší tvrzení než axiom superuniversality.

2.7 Příklady a poznámky

Poznámka 2.7.1. Konzistenci universální teorie dokázal jako první M. Boffa [6]. Pomocí metody forcingu (za předpokladu konzistence **ZF**) ukázal, že existuje model teorie množin s axiomem silného výběru, ve kterém lze sestrojit superuniversální $\in$-strukturu. [1]

Z důkazu konzistence, který je uveden v této kapitole, mj. vyplývá, že superuniversální $\in$-strukturu lze sestrojit v každém modelu **ZFS₋**, a metody forcingu tudíž není třeba.

V universální teorii lze získat tranzitivní třídy, které jsou modely řady zajímavých rozšíření teorie množin bez regularity.

[1] Téže metody lze užít i k důkazu věty 2.4.9.

Příklad 2.7.2. Buď $\mathfrak{A}$ úplná $\in$-struktura a $\sim$ koextenzivní relace na $\mathfrak{A}$. Pak $\in$-struktura $\mathfrak{A}/{\sim}$ je rovněž úplná.

Poznámka 2.7.3. Uvažujme nějakou extenzivní a koextenzivní ekvivalenci $\sim$ na $\langle \mathbf{V}, \in_{\mathbf{V}} \rangle$. Podle 2.2.15 a předchozího příkladu je $\langle \mathbf{V}, \in_{\mathbf{V}} \rangle/{\sim}$ extenzionální úplná $\in$-struktura a podle principu universality (2.6.2) existuje tranzitivní třída X taková, že $\langle X, \in_X \rangle \cong \langle \mathbf{V}, \in_{\mathbf{V}} \rangle/{\sim}$. Vhodnou volbou ekvivalence $\sim$ můžeme takovýmto způsobem obdržet interpretace řady zajímavých neregulárních teorií. Mezi takové teorie patří např. některé z těch, kterými se zabývají publikace [1] a [4].

Příklad 2.7.4. Z principu universality vyplývá, že $\mathbf{Ur}$ je vlastní třída. Dvojice $\langle \mathbf{V}, \mathbf{Id} \rangle$ totiž tvoří $\in$-strukturu a je-li T tranzitivní třída taková, že $\langle T, \in_T \rangle \cong \langle \mathbf{V}, \mathbf{Id} \rangle$, pak $T \subseteq \mathbf{Ur}$.

Kapitola 3

Automorfismy a obory invariantních tříd

Hlavním cílem je studovat obory množin resp. tříd, invariantních vůči grupám automorfismů resp. filtrům grup automorfismů $\in$-struktury $\langle \mathbf{V}, \in_{\mathbf{V}} \rangle$. Pojem grupy automorfismů zachycujeme pomocí pojmu *oblasti podobností*, přičemž *podobnostmi* nazýváme určité fragmenty automorfismů, získané jejich zúžením na nějakou tranzitivní množinu; soustředíme se tak na ty grupy, které jsou dány třídou množinových fragmentů automorfismů, tvořících uvažovanou grupu. Obdobně, místo o filtrech grup automorfismů, mluvíme o filtrech (resp. jen bázích filtrů) oblastí podobností.

Základním oborem invariantních množin je obor $\mathbf{FIX}_S$ těch množin, které jsou invariantní vzhledem k oblasti S podobností, tj. takových, že $f(x) = x$ pro každé $f \in S$ takové, že $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Můžeme na něj hledět jako na obor množin, jejichž rozkladová třída v tzv. *S-orbitální ekvivalenci* (přirozeně indukované oblastí S) je jednoprvková; rozkladové třídy S-orbitální ekvivalence nazýváme *S-orbitami.* Stěžejní význam pak má věta o orbitách; řada dalších výsledků o $\mathbf{FIX}_S$ je jejím důsledkem. Zmiňme zde alespoň tvrzení, že obor množin invariantních vůči všem podobnostem je právě fundované jádro $\mathbf{WF}$: $\mathbf{FIX}_{\mathbf{Sim}} = \mathbf{WF}$, kde $\mathbf{Sim}$ označuje oblast všech podobností. Jinými slovy, $\mathbf{Sim}$ je *bodovým stabilizátorem* $\mathbf{WF}$, tj. $\mathbf{Sim} = [\![\mathbf{WF}]\!]$, a pro $X = \mathbf{WF}$ tak platí „rovnice“ $\mathbf{FIX}_{[\![X]\!]} = X$; otázce „řešení“ uvedené rovnice se věnujeme podrobněji. Rovněž poukazujeme na „Galoisovu korespondenci“ danou operátory $[\![\ ]\!]$ a $\mathbf{FIX}$, tj. na platnost vztahů $[\![\mathbf{FIX}_{[\![X]\!]}]\!] = [\![X]\!]$ a $\mathbf{FIX}_{[\![\mathbf{FIX}_S]\!]} = \mathbf{FIX}_S$ pro každou třídu X a oblast podobností S; objasníme otázku uzavřenosti $\mathbf{FIX}_S$ na definování (spec. na gödelovské operace) a budeme se též věnovat problému rozšiřování „parciálních automorfismů“ do automorfismů celého universa.

Pojem *Φ-invariantních tříd*, kde Φ je nějaká báze (filtru) oblastí podobností, můžeme považovat za jisté zobecnění dosud zmiňovaného pojmu invariantních množin. Studiu Φ-invariantních tříd věnujeme další část kapitoly.

V závěru sestrojíme superuniversální podstrukturu $\in$-struktury $\langle \mathbf{V}, \in_{\mathbf{V}} \rangle$, kterou později uplatníme při objasňování otázky jednoduchosti reflexe. Zde ji užijeme k důkazu, že axiom superuniversality je silnější než princip universality.

3.1 Automorfismy a podobnosti

Definice 3.1.1. Zobrazení f nazveme *podobností množin*, jestliže existují tranzitivní množiny t_1, t_2 takové, že f je izomorfismem $\in$-struktur $\langle t_1, \in_{t_1} \rangle$ a $\langle t_2, \in_{t_2} \rangle$. O podobnostech množin budeme dále hovořit jen jako o podobnostech. Třídu všech podobností označme **Sim**.

Definice 3.1.2. Řekneme, že zobrazení F je *věrné*, jestliže pro každé $x \in \mathrm{Dom}(f)$ platí $F(x) = F''x$.

Následující lemma je analogií pozorování 2.1.12 (i).

Lemma 3.1.3. *Zobrazení f je podobnost právě tehdy, když je prosté, věrné a* $\mathrm{Dom}(f)$ *je tranzitivní množina.*

Důkaz. Podle definice je každá podobnost prostým zobrazením, jehož definičním oborem je tranzitivní množina. Buď f podobnost. Pak pro každé $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$ platí

$$(*) \qquad y \in x \Leftrightarrow f(y) \in f(x),$$

a tedy $f''x \subseteq f(x)$. Je-li $z \in f(x)$, je $z \in \mathrm{Rng}(f)$, jelikož $\mathrm{Rng}(f)$ je tranzitivní. Existuje tedy $y \in \mathrm{Dom}(f)$ tak, že $f(y) = z$. Pak ovšem $f(y) \in f(x)$, a tedy $y \in x$. Platí tudíž rovněž inkluze $f(x) \subseteq f''(x)$. Předpokládejme naopak, že f je prosté, věrné zobrazení a $\mathrm{Dom}(f)$ tranzitivní množina. Stačí dokázat, že $\mathrm{Rng}(f)$ je tranzitivní a pro každé $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$ platí $(*)$. Nechť $y \in \mathrm{Rng}(f)$. Pak existuje $x \in \mathrm{Dom}(f)$ tak, že $y = f(x)$. Protože $f(x) = f''x \subseteq \mathrm{Rng}(f)$, je $y \subseteq \mathrm{Rng}(f)$. Nechť $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$. Pokud $y \in x$, je $f(y) \in f''x = f(x)$. Jestliže naopak $f(y) \in f(x)$, pak $f(y) \in f''x$, a tudíž existuje $z \in x$ takové, že $f(z) = f(y)$. Protože zobrazení f je prosté, platí $y = z$, a tedy $y \in x$. $\square$

Je-li F automorfismus universa množin a t tranzitivní množina, pak zřejmě $F \restriction t \in \mathbf{Sim}$. Následující věta toto tvrzení v jistém smyslu obrací.

Věta 3.1.4. *Je-li f podobnost, pak existuje automorfismus F takový, že $f \subseteq F$.*

Důkaz. S využitím axiomu superuniversality lze snadno sestrojit posloupnost podobností $\langle f_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{On} \rangle$ takovou, že $f_0 = f$, $f_\alpha \subseteq f_\beta$ pro $\alpha \leq \beta$ a pro každé x platí $x \in \mathrm{Dom}(f_{\mathbf{C}(x)+1}) \cap \cap \mathrm{Rng}(f_{\mathbf{C}(x)+1})$. Třída $F = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{On}} f_\alpha$ je pak zřejmě zobrazení, které je automorfismem universa množin, a platí $f \subseteq F$. $\square$

Všimněme si, že třída **Sim** je částečně uspořádána inkluzí a pro každé dvě podobnosti $f, g \in \mathbf{Sim}$ platí $f^{-1} \in \mathbf{Sim}$ a $f \circ g \in \mathbf{Sim}$.

Definice 3.1.5. Nechť $S \subseteq \mathbf{Sim}$. Řekneme, že S je *částečná oblast podobností*, jestliže platí:

$$(\forall f, g \in S)(f^{-1} \in S \ \&\ f \circ g \in S).$$

Universem částečné oblasti podobností S nazveme třídu

$$\mathbf{Univ}(S) = \bigcup \{ \mathrm{Dom}(f) \mid f \in S \}.$$

Řekneme, že S je *oblast podobností*, jestliže je to částečná oblast podobností a $\mathbf{Univ}(S) = \mathbf{V}$.

Oblasti podobností (resp. částečné oblasti podobností) budeme dále často nazývat jen oblastmi (resp. částečnými oblastmi). Je zřejmé, že **Sim** je oblast podobností.

Obory invariantních množin

Definice 3.1.6. Buď S částečná oblast.

(i) Řekneme, že množiny x, y jsou *S-podobné*, jestliže existuje podobnost množin $f \in S$ taková, že $x \in \mathrm{Dom}(f)$ a $y = f(x)$. V tom případě budeme psát $x \approx_S y$. Relace $\approx_S$ je zřejmě ekvivalence na třídě $\mathbf{Univ}(S)$. Nazýváme ji *S-orbitální ekvivalencí* a její rozkladové třídy *orbitami S-podobnosti*. Je-li $S = \mathbf{Sim}$, budeme krátce hovořit o *podobných množinách, orbitální ekvivalenci* a *orbitách podobnosti*. Místo $\approx_{\mathbf{Sim}}$ budeme psát jen $\approx$.

(ii) Označme $\mathbf{FIX}_S = \{\, x \in \mathbf{Univ}(S) \mid [x]_{\approx_S} = \{x\}\,\}$. Řekneme, že množina x je *invariantní vzhledem k S*, pokud $x \in \mathbf{FIX}_S$.

Zřejmě platí $\mathbf{FIX}_S = \{\, x \in \mathbf{Univ}(S) \mid (\forall f \in S)(x \in \mathrm{Dom}(f) \Rightarrow f(x) = x)\,\}$.

Tvrzení 3.1.7. *Buď S oblast. Pak $\mathbf{FIX}_S$ je kotranzitivní.*

Důkaz. Nechť $u \subseteq \mathbf{FIX}_S$ a nechť $f \in S$ je podobnost taková, že $u \in \mathrm{Dom}(f)$. Potom pro každé $x \in u$ je $f(x) = x$, tedy $f(u) = f''u = u$, a tudíž $u \in \mathbf{FIX}_S$. □

Věta 3.1.8 (o orbitách). *Buď X současně tranzitivní i kotranzitivní třída a t tranzitivní množina taková, že $t \notin X$. Buď dále f podobnost, jejímž definičním oborem je t. Pak existuje soubor podobností $\langle f_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{On}\rangle$ takový, že $\mathrm{Dom}(f_\alpha) = t$ pro každé $\alpha \in \mathbf{On}$, $f_0 = f$ a pro každé $\alpha, \beta \in \mathbf{On}$, $\alpha \neq \beta$ platí:*

$$f_\alpha(x) = f_\beta(x) \Leftrightarrow x \in t \cap X.$$

Důkaz. Pro $\alpha_0 = \sup(t \cap \mathbf{On})$ položme

$$A_0 = (t - X) \times \{\, \alpha \in \mathbf{On} \mid \alpha > \alpha_0 \,\}.$$

Vzhledem k volbě α_0 je zřejmé, že $A_0 \cap t = \emptyset$. Položme $A = t \cup A_0$ a

$$\in^A = \in_t \cup \{\, \langle \langle x, \alpha\rangle, \langle y, \alpha\rangle \rangle \in (A_0 \times A_0) \mid x \in y \,\} \cup \{\, \langle x, \langle y, \alpha\rangle \rangle \in ((t \cap X) \times A_0) \mid x \in y \,\}.$$

Relace $\in^A$ je úzká na A, dvojice $\mathfrak{A} = \langle A, \in^A\rangle$ tudíž tvoří $\in$-strukturu. Z její definice navíc ihned plyne $\langle t, \in_t\rangle \leqslant \mathfrak{A}$. Dokažme nyní, že $\in$-struktura $\mathfrak{A}$ je extenzionální. Nechť $a, b \in A$ a $a_{\mathfrak{A}} = b_{\mathfrak{A}}$. Kdyby $a \in t$ a $b \in A_0$, pak by pro nějaké $x \in t - X$, $\alpha > \alpha_0$ platilo $b = \langle x, \alpha\rangle$ a jelikož $b_{\mathfrak{A}} = a_{\mathfrak{A}} = a \subseteq t$, bylo by $b_{\mathfrak{A}} \subseteq t \cap X$, a tedy $b_{\mathfrak{A}} = x$. To ale znamená, že $x \in X$, neboť X je kotranzitivní — spor! Podobně není možné, aby $b \in t$ a $a \in A_0$. Vidíme, že může nastat právě jeden z následujících případů:

(i) $a, b \in t$. Pak ale $a_{\mathfrak{A}} = a$ a $b_{\mathfrak{A}} = b$, a tedy $a = b$.

(ii) $a, b \in A_0$. Pak $a = \langle x, \alpha\rangle$, $b = \langle y, \beta\rangle$, pro nějaká $x, y \in t - X$, $\alpha, \beta > \alpha_0$. Zřejmě $x - X \neq \neq \emptyset$. Zvolme libovolně $z \in x - X$. Pak $\langle z, \alpha\rangle \in a_{\mathfrak{A}} = b_{\mathfrak{A}}$, odkud vzhledem k definici relace $\in^A$ ihned vyplývá $\alpha = \beta$. Dokázat rovnost $x = y$ je již snadné.

V obou případech tedy platí $a = b$. Tím je dokázána extenzionalita $\in$-struktury $\mathfrak{A}$. Podle 2.6.1 existuje tranzitivní třída $T \supseteq t$ a izomorfismus I $\in$-struktur $\mathfrak{A}$ a $\langle T, \in_T \rangle$ identický na t. Dále podle 3.1.4 existuje automorfismus F universa množin takový, že $F \supseteq f$. Zřejmě $F \circ I$ je izomorfismus $\in$-struktur $\mathfrak{A}$ a $\langle F[T], \in_{F[T]} \rangle$ a $f \subseteq F \circ I$. Položme nyní $f_0 = f$ a pro každé $\alpha \in \mathbf{On}$, $\alpha > 0$, $x \in t$ definujme

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pokud } x \in t \cap X \\ I \circ F(\langle x, \alpha_0 + \alpha \rangle) & \text{pokud } x \in t - X \end{cases}$$

Snadno se nahlédne, že právě definovaná zobrazení f_α jsou podobnostmi množin. Protože zobrazení $I \circ F$ je prosté, je pro libovolná ordinální čísla $\alpha \neq \beta$ a $x \in t$ splněno

$$f_\alpha(x) = f_\beta(x) \Leftrightarrow x \in t \cap X.$$

□

Důsledek 3.1.9. *Orbita podobnosti $[x]_{\approx}$ prvku x je jednobodová, je-li $x \in \mathbf{WF}$ a je to vlastní třída, pokud $x \notin \mathbf{WF}$. Speciálně tedy $\mathbf{WF} = \mathbf{FIX}_{\mathbf{Sim}}$.*

Důkaz. Buď $x \in \mathbf{WF}$ množina taková, že pro každé $y \in x$ je $[y]_{\approx} = \{y\}$. Pak pro libovolnou podobnost f, která splňuje $x \in \mathrm{Dom}(f)$, platí $x = f''x = f(x)$, a tedy $[x]_{\approx} = \{x\}$. Nechť $x \notin \mathbf{WF}$. Označme $t = \mathrm{TC}(\{x\})$. Pak $t \notin \mathbf{WF}$ a $x \in t - \mathbf{WF}$. Poněvadž $\mathbf{WF}$ je tranzitivní i kotranzitivní třída, existuje podle předchozí věty soubor podobností $\langle f_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{On} \rangle$ definovaných na množině t tak, že je-li $\alpha, \beta \in \mathbf{On}$, $\alpha \neq \beta$, je $f_\alpha(x) \neq f_\beta(x)$. Přitom $f_\alpha(x) \in [x]_{\approx}$ pro každé $\alpha \in \mathbf{On}$; $[x]_{\approx}$ je tedy vlastní třída. □

Dříve než uvedeme některá zobecnění tohoto poznatku, zavedeme pojem fundovaného obalu a bodového stabilizátoru.

Definice 3.1.10. Buď w libovolná množina. Položme

$$\begin{aligned} p_0^w &= w, \\ p_{\alpha+1}^w &= \mathscr{P}(p_\alpha^w) \quad \text{pro každé } \alpha \in \mathbf{On}, \\ p_\lambda^w &= \bigcup_{\alpha<\lambda} p_\alpha^w \quad \text{pro } \lambda \in \mathbf{On} \text{ limitní.} \end{aligned}$$

Třídu $\mathbf{WF}(w) = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{On}} p_\alpha^w$ nazýváme *fundovaný obal množiny w*. Je-li W vlastní třída, definujeme *fundovaný obal třídy W* jako $\mathbf{WF}(W) = \bigcup_{w \subseteq W} \mathbf{WF}(w)$.

Všimněme si, že pro libovolnou třídu W je $\mathbf{WF}(W)$ nejmenší kotranzitivní třídou obsahující W jako část, speciálně tedy $\mathbf{WF} \cup W \subseteq \mathbf{WF}(W)$. Rovnost $\mathbf{WF}(W) = \mathbf{WF}$ platí, právě když $W \subseteq \mathbf{WF}$, a tak například $\mathbf{WF}(\emptyset) = \mathbf{WF}$. Je-li W tranzitivní, je i $\mathbf{WF}(W)$ tranzitivní.

Definice 3.1.11. Buď X libovolná třída. *Bodovým stabilizátorem třídy X* nazveme třídu podobností $[\![X]\!]$ definovanou předpisem

$$[\![X]\!] = \{\, f \in \mathbf{Sim} \mid f \text{ a } f^{-1} \text{ jsou identické na } X \}.$$

Bodový stabilizátor libovolné třídy X je oblast podobností. Navíc je zřejmé, že platí $X \subseteq$
$\subseteq \mathbf{FIX}_{[\![X]\!]}$.

Tvrzení 3.1.12. *Buď w tranzitivní množina. Pak platí:*

(i) $\llbracket w \rrbracket = \llbracket \mathbf{WF}(w) \rrbracket$.

(ii) *Jestliže $x \notin \mathbf{WF}(w)$, je $[x]_{\asymp_{\llbracket w \rrbracket}}$ vlastní třída. Speciálně $\mathbf{WF}(w) = \mathbf{FIX}_{\llbracket w \rrbracket}$ a $\mathbf{WF}(w) = \mathbf{FIX}_{\mathbf{WF}(w)}$.*

Důkaz. Budeme postupovat podobně jako v důkazu věty 3.1.9. Je zřejmé, že $\llbracket \mathbf{WF}(w) \rrbracket \subseteq \llbracket w \rrbracket$. Buď $f \in \llbracket w \rrbracket$. Předpokládejme, že $x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathbf{WF}(w)$, $f(x) \neq x$ a $x \in p^w_\alpha$, přičemž ordinální číslo α je nejmenší možné. Protože $f \in \llbracket w \rrbracket$, je $\alpha > 0$. Je-li $y \in x$, existuje ordinální číslo $\beta < \alpha$ takové, že $y \in p^w_\beta$, a tedy vzhledem k volbě α platí $f(y) = y$. To však znamená, že $x = f''x = f(x)$, což je spor. Tím je dokázána rovnost $\llbracket w \rrbracket = \llbracket \mathbf{WF}(w) \rrbracket$. Nyní stačí dokázat, že pro $x \notin \mathbf{WF}(w)$ je $[x]_{\asymp_{\llbracket w \rrbracket}}$ vlastní třída (čili speciálně $x \notin \mathbf{FIX}_{\llbracket w \rrbracket}$). K tomu opět užijeme věty o orbitách (3.1.8). Nechť $x \notin \mathbf{WF}(w)$ a označme $t = \mathrm{TC}(w \cup x)$. Z tranzitivity $\mathbf{WF}(w)$ plyne, že $t \notin \mathbf{WF}(w)$, a tedy existuje soubor podobností $\langle f_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{On} \rangle$ definovaných na t, které jsou identické na w (a jsou tudíž prvky oblasti $\llbracket w \rrbracket$)[1] tak, že $f_\alpha(x) \neq f_\beta(x)$ pro každá dvě různá ordinální čísla α, β. Protože $f_\alpha(x) \in [x]_{\asymp_{\llbracket w \rrbracket}}$ pro každé $\alpha \in \mathbf{On}$, je $[x]_{\asymp_{\llbracket w \rrbracket}}$ vlastní třída. □

Právě dokázané tvrzení vzbuzuje domněnku, že by rovnost $X = \mathbf{FIX}_{\llbracket X \rrbracket}$ mohla platit pro vůbec všechny tranzitivní třídy X, splňující $X = \mathbf{WF}(X)$, tedy pro třídy, které jsou současně tranzitivní a kotranzitivní. Následující příklad tuto domněnku vyvrací.

Příklad 3.1.13. Zvolme pevně libovolný urelement u a položme $Q = \{\, x \mid u \notin \mathrm{TC}(\{x\}) \,\}$. Snadno se nahlédne, že třída Q je současně tranzitivní i kotranzitivní a platí $Q \cap \mathbf{Ur} = \mathbf{Ur} - \{u\}$. Ukážeme, že $u \in \mathbf{FIX}_{\llbracket Q \rrbracket}$. Nechť $f \in \llbracket Q \rrbracket$ a $u \in \mathrm{Dom}(f)$. Pak $f(u) = \{f(u)\}$, čili $f(u) \in \mathbf{Ur}$. Kdyby $f(u) \neq u$, muselo by $f(u) \in Q$. To však znamená, že f^{-1} není identické na Q, a tedy $f \notin \llbracket Q \rrbracket$. To je spor.

O rovnici $X = \mathbf{FIX}_{\llbracket X \rrbracket}$.

Předchozí příklad je současně motivací k následujícímu tvrzení.

Tvrzení 3.1.14. *Buď X libovolná tranzitivní třída*[2]. *Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $X = \mathbf{FIX}_{\llbracket X \rrbracket}$,

(ii) *Je-li $x \in \mathbf{V} - X$, je třída $[x]_{\asymp_{\llbracket X \rrbracket}}$ aspoň dvouprvková,*

(iii) *Je-li $x \in \mathbf{V} - X$, je třída $[x]_{\asymp_{\llbracket X \rrbracket}}$ nekonečná.*

Důkaz. Předně, je-li $x \in X$, je $[x]_{\asymp_{\llbracket X \rrbracket}} = \{x\}$, a tedy pro $x \in \mathbf{V} - X$ platí $[x]_{\asymp_{\llbracket X \rrbracket}} \subseteq \mathbf{V} - X$. Platnost implikace (iii)⇒(ii) je evidentní. Nejprve sporem dokážeme (ii)⇒(iii). Předpokládejme, že třída X splňuje podmínku (ii), ale nesplňuje (iii). Existuje tudíž $x \in \mathbf{V} - X$ tak, že $[x]_{\asymp_{\llbracket X \rrbracket}}$ je konečná množina, obsahující alespoň dva prvky. Označme $y = [x]_{\asymp_{\llbracket X \rrbracket}}$. Jelikož X je tranzitivní a $y \subseteq \mathbf{V} - X$, platí $y \notin X$. Nechť $f \in \llbracket X \rrbracket$, $y \in \mathrm{Dom}(f)$. Je-li $z \in y$, je $f(z) \asymp_{\llbracket X \rrbracket} x$, a tedy $f(z) \in y$. Jelikož f je prosté zobrazení a $y \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ konečná, je $f \restriction y$ permutací množiny y, a $f(y) = f''y = y$. To však znamená, že $[y]_{\asymp_{\llbracket X \rrbracket}} = \{y\}$, což je ve sporu s (ii).

[1] Zde je pochopitelně důležité, že jsou definované na celém w. To totiž zaručuje, že i inverzní zobrazení je identické na w.

[2] Z důkazu jest patrno, že věta platí dokonce pro každou třídu X splňující podmínku $(\forall x \in X)(x \neq \emptyset \Rightarrow x \cap X \neq \emptyset)$.

Nechť $X = \mathbf{FIX}_{[\![X]\!]}$; dokážeme (ii): Zvolme libovolně $x \in \mathbf{V} - X$. Pak $x \notin \mathbf{FIX}_{[\![X]\!]}$, a tedy $[x]_{\between_{[\![X]\!]}} \neq \{x\}$. Protože $x \in [x]_{\between_{[\![X]\!]}}$, je $[\![X]\!]$-orbita prvku x alespoň dvouprvková.

Zbývá prokázat implikaci (ii)$\Rightarrow$(i). Nechť X splňuje podmínku (ii). Víme, že $X \subseteq \mathbf{FIX}_{[\![X]\!]}$. Předpokládejme, že existuje $x \in \mathbf{FIX}_{[\![X]\!]} - X$. Protože $x \notin X$, je podle (ii) třída $[x]_{\between_{[\![X]\!]}}$ alespoň dvouprvková, což je ve sporu s $x \in \mathbf{FIX}_{[\![X]\!]}$. $\square$

Definice 3.1.15. Nechť S je částečná oblast podobností a $X \subseteq \mathbf{Univ}(S)$ libovolná třída. Řekneme, že X je S-*figura*, je-li splněno:

$$(\forall x \in X)([x]_{\between_S} \subseteq X).$$

Sim-figury budeme krátce nazývat *figurami*.

Figurami jsou např. třídy $\mathbf{V}$, $\mathbf{Ur}$, dále každá podtřída $\mathbf{WF}$ či libovolná orbita. Je-li S částečná oblast podobností a $X \subseteq \mathbf{Univ}(S)$, je třída $Y = \bigcup_{x \in X} [x]_{\between_S}$ nejmenší S-figurou obsahující X jako část. Všimněme si, že v případě, že třída X je tranzitivní, je rovněž Y tranzitivní.

Pozorování 3.1.16. *Nechť S je částečná oblast podobností a X S-figura. Pak platí:*

$$(\forall f \in S)(\forall x \in \mathrm{Dom}(f))(x \in X \Leftrightarrow f(x) \in X).$$

Tvrzení 3.1.17. *Je-li X tranzitivní a kotranzitivní figura, pak $X = \mathbf{FIX}_{[\![X]\!]}$.*

Důkaz. Nechť X je tranzitivní a kotranzitivní figura. Stačí dokázat inkluzi $\mathbf{FIX}_{[\![X]\!]} \subseteq X$. Nechť $x \notin X$. Podle věty o orbitách (3.1.8) existuje podobnost f identická na X taková, že $f(x) \neq x$. Protože X je figura, je rovněž f^{-1} je identická na X, neboť pro $y \in \mathrm{Dom}(f^{-1}) \cap X$ je podle pozorování 3.1.16 $f^{-1}(y) \in \mathrm{Dom}(f) \cap X$, a tedy $f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = y$. To znamená, že $f \in [\![X]\!]$. Protože $f(x) \neq x$, platí $x \notin \mathbf{FIX}_{[\![X]\!]}$. Tím je požadovaná inkluze prokázána. $\square$

Rozšiřování automorfismů tranzitivních figur

Podle tvrzení 3.1.4 lze každou podobnost rozšířit do automorfismu. Ukažme nyní, jak na základě axiomu superuniversality sestrojit automorfismy rozšiřující další typ zobrazení.

Lemma 3.1.18. *Nechť X je tranzitivní figura, F automorfismus $\in$-struktury $\langle X, \in_X \rangle$ a f podobnost splňující $f \restriction X \subseteq F$. Pak pro každou množinu z existuje podobnost $g \supseteq f$ taková, že $z \in \mathrm{Dom}(g)$ a $g \restriction X \subseteq F$.*

Důkaz. Buď z množina. Relace $f \cup F$ je zobrazení, neboť podle předpokladu $f \restriction X \subseteq F$. Protože X je tranzitivní a zobrazení f, F jsou věrná, je rovněž $f \cup F$ věrné. Navíc je $f \cup F$ prosté, neboť f i F jsou prostá, $\mathrm{Rng}(F) = X$ a podle 3.1.16 platí $f(x) \in X$ právě tehdy, když $x \in X$. Označme $t = \mathrm{TC}(\mathrm{Dom}(f) \cup \{z\})$ a položme $g' = (f \cup F) \restriction t$. Je zřejmé, že g' je podobnost a platí $f \subseteq g'$, $g' \restriction X \subseteq F$. Množina $\mathrm{Dom}(g') \subseteq t$ je tranzitivní, a tedy podle axiomu superuniversality existuje podobnost $g \supseteq g'$ taková, že $\mathrm{Dom}(g) = t$. Nyní je již snadné nahlédnout, že g má požadované vlastnosti. $\square$

Tvrzení 3.1.19. *Nechť X je tranzitivní figura a F automorfismus $\in$-struktury $\langle X, \in_X \rangle$. Pak existuje automorfismus universa množin G takový, že $F \subseteq G$.*

Důkaz. Je-li X množina, je podle 3.1.9 $X \subseteq \mathbf{WF}$ a $F = \mathbf{Id} \restriction X$. V tom případě stačí např. položit $G = \mathbf{Id}$. Předpokládejme, že X je vlastní třída. Sestrojíme soubor podobností $\langle f_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{On} \rangle$ tak, aby následující podmínky byly splněny pro libovolné ordinální číslo α:

(1) $f_0 = \emptyset$,

(2) $f_\alpha \restriction X \subseteq F$,

(3) $\mathbf{C}^{-1}(\alpha) \in \mathrm{Dom}(f_{\alpha+1}) \cap \mathrm{Rng}(f_{\alpha+1})$,

(4) $f_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} f_\beta$, je-li α limitní,

(5) $f_\beta \subseteq f_\alpha$ pro každé $\beta \leq \alpha$.

Buď β ordinální číslo. Předpokládejme, že podobnosti f_α splňující podmínky (1)–(5) jsou již sestrojeny pro každé $\alpha \leq \beta$. Sestrojíme $f_{\beta+1}$. Z (2) a pozorování 3.1.16 vyplývá, že $f_\beta^{-1} \restriction X \subseteq F^{-1}$. Podle lemmatu 3.1.18 tudíž existuje podobnost $g \supseteq f_\beta^{-1}$ taková, že $\mathbf{C}^{-1}(\beta) \in \mathrm{Dom}(g)$ a $g \restriction X \subseteq F^{-1}$. Navíc můžeme předpokládat, že $\mathbf{C}(g)$ je nejmenší možné. Z 3.1.16 plyne, že $g^{-1} \restriction X \subseteq F$, podle lemmatu 3.1.18 tedy existuje podobnost $h \supseteq g^{-1}$ taková, že $\mathbf{C}^{-1}(\beta) \in \mathrm{Dom}(h)$ a $h \restriction X \subseteq F$. Předpokládejme opět, že $\mathbf{C}(h)$ je nejmenší možné a položme $f_{\beta+1} = h$. Snadno se nahlédne, že podobnost $f_{\beta+1}$ vyhovuje podmínkám (1)–(5).

Budiž $\langle f_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{On} \rangle$ posloupnost podobností s uvedenými vlastnostmi. Položme $G = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{On}} f_\alpha$. Z podmínky (3) plyne, že $\mathrm{Dom}(G) = \mathrm{Rng}(G) = \mathbf{V}$, díky (5) je G zobrazení, a protože $f_\alpha \in \mathbf{Sim}$ pro všechna α, je zobrazení G automorfismem universa množin. Vzhledem k podmínce (2) je též splněno $G \restriction X = F$, čili $F \subseteq G$. □

O Galoisově korespondenci

Všimněme si zajímavého vztahu mezi operátory $[\![\ ]\!]$ a **FIX**. Víme již, že pro libovolnou třídu X platí $X \subseteq \mathbf{FIX}_{[\![X]\!]}$. Naopak, je-li S oblast podobností, je snadné nahlédnout, že platí $S \subseteq [\![\mathbf{FIX}_S]\!]$. Obě tyto vlastnosti spolu s dalšími dvěma jednoduchými poznatky, které formulují antimonotonii operátorů $[\![\ ]\!]$ a **FIX**, nyní vyslovíme znovu jako pozorování. Na jeho základě již snadno dokážeme větu o Galoisově korespondenci.

Pozorování 3.1.20. *Nechť X, Y jsou třídy a S, T oblasti podobností. Potom platí:*

(i) $X \subseteq \mathbf{FIX}_{[\![X]\!]}$,

(ii) $S \subseteq [\![\mathbf{FIX}_S]\!]$,

(iii) $X \subseteq Y \Rightarrow [\![X]\!] \supseteq [\![Y]\!]$,

(iv) $S \subseteq T \Rightarrow \mathbf{FIX}_S \supseteq \mathbf{FIX}_T$.

Věta 3.1.21 (o Galoisově korespondenci).

a) Pro každou třídu X platí $[\![\mathbf{FIX}_{[\![X]\!]}]\!] = [\![X]\!]$.

b) Pro každou oblast S platí $\mathbf{FIX}_{[\![\mathbf{FIX}_S]\!]} = \mathbf{FIX}_S$.

Důkaz. Buď X libovolná třída. Podle (i) [3] je $X \subseteq \mathbf{FIX}_{[\![X]\!]}$. Z (iii) tudíž plyne $[\![X]\!] \supseteq [\![\mathbf{FIX}_{[\![X]\!]}]\!]$. Opačná inkluze vyplývá bezprostředně z (ii). Zbývá dokázat b). Nechť S je oblast podobností. Podle (ii) je $S \subseteq [\![\mathbf{FIX}_S]\!]$. Aplikací tvrzení (iv) na tuto inkluzi dostáváme $\mathbf{FIX}_S \supseteq \mathbf{FIX}_{[\![\mathbf{FIX}_S]\!]}$. Obrácenou inkluzi získáme ihned z (i), položíme-li $X = \mathbf{FIX}_S$. □

[3] Zde i ve zbytku důkazu se odvoláváme na pozorování 3.1.20.

Kompatibilní automorfismy

V úvodu této kapitoly jsme předeslali, že na oblasti podobností nahlížíme jako na jistá přiblížení grup automorfismů, se kterými lze v teorii množin snáze pracovat. Nyní ukážeme, že každá (částečná) oblast podobností skutečně přirozeným způsobem vymezuje obor automorfismů, který má vlastnosti grupy.

Definice 3.1.22. Buď F libovolný automorfismus universa množin a S částečná oblast podobností. Řekneme, že F je *kompatibilní s částečnou oblastí* S, jestliže $F''\mathbf{Univ}(S) = \mathbf{Univ}(S)$ a pro každou množinu $x \in \mathbf{Univ}(S)$ existuje $f \in S$ tak, že $f \subseteq F$ a $x \in \mathrm{Dom}(f)$.

Nás budou nejčastěji zajímat automorfismy kompatibilní s oblastmi podobností. V takovém případě bude podmínka $F''\mathbf{Univ}(S) = \mathbf{Univ}(S)$ v předchozí definici triviálně splněna.

Tvrzení 3.1.23. *Buď S částečná oblast podobností. Automorfismus $\mathbf{Id}$ je kompatibilní s S a jsou-li F, G automorfismy kompatibilní s S, jsou i automorfismy $\mathbf{Id}$, F^{-1} a $F \circ G$ kompatibilní s S. Jinými slovy: obor automorfismů kompatibilních s částečnou oblastí obsahuje jednotku a je uzavřen na skládání a na inverzní zobrazení.*

Důkaz. Buď $x \in \mathbf{Univ}(S)$. Existuje $f \in S$ tak, že $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Pak ale $f^{-1} \circ f \in S$ a platí $f^{-1} \circ f = \mathbf{Id} \restriction \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbf{Id}$. Vidíme tedy, že $\mathbf{Id}$ je kompatibilní s S. Nechť F, G jsou automorfismy kompatibilní s S a $x \in \mathbf{Univ}(S)$. Pak existuje $g \in S$ tak, že $x \in \mathrm{Dom}(g)$ a platí $g \subseteq G$. Je zřejmé, že $g(x) \in \mathbf{Univ}(S)$, a tudíž existuje podobnost $f \in S$ taková, že $g(x) \in \mathrm{Dom}(f)$ a $f \subseteq F$. Nyní platí: $f \circ g \in S$, $x \in \mathrm{Dom}(f \circ g)$ a $f \circ g \subseteq F \circ G$. Tím je prokázána kompatibilita $F \circ G$ s S. Buď opět $x \in \mathbf{Univ}(S)$. Protože $\mathbf{Univ}(S) = F''\mathbf{Univ}(S)$, je $F^{-1}(x) \in \mathbf{Univ}(S)$, a tedy existuje $f \in S$ tak, že $f \subseteq F$ a $F^{-1}(x) \in \mathrm{Dom}(f)$. Pak $x \in \mathrm{Dom}(f^{-1})$ a platí $F^{-1} \supseteq f^{-1} \in S$. $\square$

Tvrzení 3.1.24. *Nechť X je libovolná třída a F automorfismus. Pak F je kompatibilní s $[\![X]\!]$ právě tehdy, když $F \restriction X = \mathbf{Id} \restriction X$.*

Důkaz. Nechť F je kompatibilní s $[\![X]\!]$ a $x \in X$. Pak existuje $f \in [\![X]\!]$ tak, že $x \in \mathrm{Dom}(f)$ a $f \subseteq F$, a platí tudíž $F(x) = f(x) = x$. Nechť naopak $F \restriction X = \mathbf{Id} \restriction X$. Pak pro každé $f \subseteq F$, $f \in \mathbf{Sim}$ platí $f \in [\![X]\!]$. Je-li totiž $x \in X \cap \mathrm{Dom}(f)$, je $f(x) = F(x) = x$; pro $y \in X \cap \mathrm{Dom}(f^{-1})$ zase platí $f^{-1}(y) = F^{-1}(y) = F^{-1}(F(y)) = y$. Podobnosti f, f^{-1} jsou tedy identické na X. $\square$

Tvrzení 3.1.25. *Je-li S oblast a F automorfismus kompatibilní s S, je F identický na $\mathbf{FIX}_S$.*

Důkaz. Plyne okamžitě z příslušných definic. $\square$

Obrácené tvrzení, totiž že $\mathbf{FIX}_S$ je třída právě těch množin, které jsou pevnými body všech automorfismů kompatibilních s S, nemusí být pravdivé[4]. Problém spočívá v tom, že oblast S může obsahovat i podobnosti, které nejsou částmi žádného automorfismu kompatibilního s S. Je zřejmé, že takovéto podobnosti jsou v oblasti S „nadbytečné“, přinejmenším z hlediska našeho záměru studovat grupy automorfismů. Pokud bychom byli schopni dokázat, že oblast S takové podobnosti neobsahuje, bylo by shora uvedené obrácené tvrzení v pořádku. Oblastmi s těmito vlastnostmi, jak uvidíme, budou například tzv. homogenní oblasti s majorantami řetězů.

[4] Pokud se rozhodneme přehlížet nepříjemný fakt, že kvantifikuje třídy!

Homogenní oblasti a oblasti s majorantami řetězů

Definice 3.1.26. Řekneme, že oblast podobností S je *homogenní na třídě* X, jestliže platí

$$(\forall f \in S)(\forall x \in X)(\exists g \in S)(f \subseteq g \ \&\ x \in \mathrm{Dom}(g)).$$

Je-li S homogenní na $\mathbf{V}$, řekneme krátce, že S je *homogenní*. Řekneme dále, že S je *otevřená*, jestliže pro každé $f \in S$ a každou podobnost $g \supseteq f$ platí $g \in S$ (tedy je-li S otevřená podtřída v uspořádání $\langle \mathbf{Sim}, \subseteq \rangle$).

Je zřejmé, že v definici homogenní oblasti bychom mohli ekvivalentně nahradit podformuli $x \in \mathrm{Dom}(g)$ formulí $x \in \mathrm{Rng}(g)$, případně formulí $x \in \mathrm{Rng}(g) \ \&\ x \in \mathrm{Dom}(g)$. Následující pozorování vyplývá snadno přímo z axiomu superuniversality.

Pozorování 3.1.27.

(i) Každá otevřená oblast je homogenní.

(ii) **Sim** *je otevřená oblast podobností.*

Tvrzení 3.1.28. *Nechť t je tranzitivní množina a $X \supseteq t$ libovolná třída. Pak pro každou podobnost $f \in [\![X]\!]$ existuje $g \in [\![X]\!]$ tak, že $f \subseteq g$ a $t \subseteq \mathrm{Dom}(g)$. Speciálně, je-li X tranzitivní, je $[\![X]\!]$ homogenní na X.*

Důkaz. Buď $f \in [\![X]\!]$. Položme $g = f \cup \mathbf{Id} \restriction t$. Snadno se nahlédne, že g je zobrazení. Je-li $f(x) \in t$, je $f(x) = f^{-1}(f(x)) = x$, a protože zobrazení f i $\mathbf{Id} \restriction t$ jsou prostá, je rovněž g prosté. Dokažme, že g je podobnost. Jelikož $\mathrm{Dom}(g) = \mathrm{Dom}(f) \cup t$ je tranzitivní, stačí podle lemmatu 3.1.3 ověřit pro libovolné $x \in \mathrm{Dom}(g)$ rovnost $g''x = g(x)$. Nechť $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Pak $x \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, a tudíž $g(y) = f(y)$ pro každé $y \in x$. To znamená, že $g''x = f''x = f(x) = g(x)$. Je-li $x \in t$, je $g(x) = x$ a jelikož platí také $x \subseteq t$, je $g''x = x$. Protože $f, \mathbf{Id} \restriction t \in [\![X]\!]$, je zřejmé, že $g \in [\![X]\!]$. Speciální část tvrzení plyne okamžitě z dokázaného. □

Důsledek 3.1.29. *Nechť t je tranzitivní množina. Pak $[\![t]\!]$ je homogenní oblast.*

Důkaz. Podle předchozího tvrzení existuje pro každé $f \in [\![t]\!]$ podobnost $g \in [\![t]\!]$, $g \supseteq f$ taková, že $t \subseteq \mathrm{Dom}(g)$. Podle 3.1.27 je **Sim** homogenní, a tudíž pro libovolnou množinu x existuje podobnost $h \supseteq g$ taková, že $x \in \mathrm{Dom}(h)$. Poněvadž $\mathbf{Id} \restriction t \subseteq g \subseteq h$, je $h \in [\![t]\!]$. □

Tvrzení 3.1.30. *Je-li S homogenní, je třída $\mathbf{FIX}_S$ uzavřena na definování. Speciálně je třída $\mathbf{FIX}_S$ uzavřena na gödelovské operace.*

Důkaz. Buď S homogenní oblast a x množina definovaná formulí φ se všemi volnými proměnnými mezi $y, y_1, \ldots, y_n$ z parametrů $p_1, \ldots, p_n \in \mathbf{FIX}_S$. Máme dokázat $x \in \mathbf{FIX}_S$. Nechť $f \in S$, $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Protože S je homogenní, existuje $g \in S$ tak, že $f \subseteq g$ a $\{p_1, \ldots, p_n\} \in \mathrm{Dom}(g)$. Podle věty 3.1.4 dále existuje automorfismus F takový, že $F \supseteq g$. Pak $F(p_i) = g(p_i) = p_i$ pro $i = 1, \ldots, n$. Jelikož F je automorfismus, platí

$$y \in x \Leftrightarrow \varphi(y, p_1, \ldots, p_n) \Leftrightarrow \varphi(F(y), F(p_1), \ldots, F(p_n)) \Leftrightarrow \varphi(F(y), p_1, \ldots, p_n) \Leftrightarrow F(y) \in x.$$

Vidíme, že $F''x = x$, a tedy $f(x) = F(x) = x$. □

Definice 3.1.31. Buď S oblast podobností. *Řetězem podobností v S* nazveme libovolný soubor podobností $\langle f_\alpha \mid \alpha \in \gamma \rangle$, kde $\gamma \in \mathbf{On}$ a $f_\alpha \in S$ pro všechna $\alpha \in \gamma$, splňující podmínku

$$(\forall \alpha, \beta \in \gamma)(\alpha \leq \beta \Rightarrow f_\alpha \subseteq f_\beta).$$

Řekneme, že oblast S *má majoranty řetězů*, jestliže pro každý řetěz podobností $\langle f_\alpha \mid \alpha \in \gamma \rangle$ v S, existuje $f \in S$ tak, že $\bigcup_{\alpha\in\gamma} f_\alpha \subseteq f$.

Tvrzení 3.1.32. *Nechť S je homogenní oblast, která má majoranty řetězů, a nechť $f \in S$. Pak existuje automorfismus F kompatibilní s S takový, že $f \subseteq F$.*

Důkaz. Položme $f_0 = f$. Nechť je sestrojeno $f_\alpha \in S$ pro $\alpha \in \mathbf{On}$. Protože S je homogenní, existuje $g \in S$ tak, že $g \supseteq f_\alpha$, $\mathbf{C}^{-1}(\alpha) \in \mathrm{Dom}(g) \cap \mathrm{Rng}(g)$ a $\mathbf{C}(g)$ je nejmenší možné. Položme $f_{\alpha+1} = g$. Je-li $\lambda \in \mathbf{On}$ limitní a je-li již sestrojen řetěz $\langle f_\alpha \mid \alpha \in \lambda \rangle$ v S, položme $f_\lambda = g$, kde $g \in S$ je taková majoranta řetězu $\langle f_\alpha \mid \alpha \in \lambda \rangle$ v S, že $\mathbf{C}(g)$ je nejmenší možné. Mějme takto sestrojeny podobnosti f_α pro všechna $\alpha \in \mathbf{On}$ a položme $F = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{On}} f_\alpha$. Pak F je automorfismus universa množin kompatibilní s S a $F \supseteq f$. □

3.2 Obor invariantních tříd

Definice 3.2.1. Buď X libovolná třída. *Třídovým stabilizátorem X* nazveme třídu

$$[X] = \{ f \in \mathbf{Sim} \mid f[X] \subseteq X \ \&\ f^{-1}[X] \subseteq X \}.$$

Tvrzení 3.2.2. *Buď X třída. Pak platí:*

(i) $[X]$ *je oblast podobností.*

(ii) $[\![X]\!] \subseteq [X]$

(iii) $[X] \subseteq [\mathbf{WF}(X)]$ *a speciálně* $[\mathbf{WF}] = \mathbf{Sim}$.

Důkaz. $[X]$ je zřejmě částečná oblast podobností. Protože $\mathbf{Id} \restriction t \in [X]$ pro každou tranzitivní množinu t, je $\mathbf{Univ}([X]) = \mathbf{V}$. Tvrzení (ii) je zřejmé. Zbývá dokázat (iii). Buď $f \in [X]$ a $x \in \mathbf{WF}(X) \cap \mathrm{Dom}(f)$. Je-li $x \in X$, je $f(x) \in f[X] \subseteq X \subseteq \mathbf{WF}(X)$. Nechť $x \notin X$. Pak $x \subseteq \mathbf{WF}(X)$. Jestliže navíc $f(y) \in \mathbf{WF}(X)$ pro všechna $y \in x$, pak $f(x) = f''x \subseteq \mathbf{WF}(X)$, a tedy $f(x) \in \mathbf{WF}(X)$. Je tedy patrné, že pro každé $f \in [X]$ platí $f[\mathbf{WF}(X)] \subseteq \mathbf{WF}(X)$, čili $[X] \subseteq [\mathbf{WF}(X)]$. Je-li $X = \emptyset$, dostáváme speciálně $\mathbf{Sim} = [\emptyset] \subseteq [\mathbf{WF}] \subseteq \mathbf{Sim}$. □

Příklad 3.2.3. $[X]$ není obecně homogenní na X (ani v případě, že X je tranzitivní množina): Buď například $X = x$ nekonečná podmnožina $\mathbf{Ur}$, $u \in x$ a f libovolné vzájemně jednoznačné zobrazení množiny $x - \{u\}$ na x. Pak $f \in [x]$, avšak pro libovolnou podobnost $g \supseteq f$ takovou, že $u \in \mathrm{Dom}(g)$, platí $g(u) \notin x$, a tedy $g \notin [x]$.

Tvrzení 3.2.4. *Nechť X je třída a S jedna z oblastí $[\![X]\!]$, $[X]$. Je-li $\langle f_\alpha \mid \alpha \in \gamma \rangle$ řetěz podobností v S, pak $\bigcup_{\alpha\in\gamma} f_\alpha \in S$. Oblasti $[\![X]\!]$, $[X]$ tedy mají majoranty řetězů.*

Důkaz. Buď $\langle f_\alpha \mid \alpha \in \gamma \rangle$ řetěz podobností v S a označme $f = \bigcup_{\alpha\in\gamma} f_\alpha$. Zřejmě $f \in \mathbf{Sim}$. Je-li $S = [\![X]\!]$, pak pro každé $x \in \mathrm{Dom}(f) \cap X$ existuje $\alpha \in \gamma$ tak, že $x \in \mathrm{Dom}(f_\alpha)$ a $f(x) = f_\alpha(x) = x$. Podobnost f je tedy identická na X. Podobně lze nahlédnout, že i podobnost f^{-1} je identická na X, a tedy $f \in S$. Je-li $S = [X]$, je $f[X] = \bigcup_{\alpha\in\gamma} f_\alpha[X] \subseteq X$ a $f^{-1}[X] = \bigcup_{\alpha\in\gamma} f_\alpha^{-1}[X] \subseteq X$, čili opět $f \in S$. □

Tvrzení 3.2.5. *Buď S oblast podobností a X libovolná třída. Pak platí:*

(i) *$S \subseteq [X]$ právě tehdy, když X je S-figura.*

(ii) *Jestliže $S \subseteq [X]$ a F je automorfismus kompatibilní s S, pak $F[X] = X$.*

(iii) *Jestliže $S \subseteq [X]$ a S je homogenní oblast mající majoranty řetězů, pak pro libovolné $f \in S$ existuje automorfismus F universa množin splňující $F \supseteq f$ a $F[X] = X$.*

Důkaz. Ad (i). Je-li $S \subseteq [X]$, $x \in X$ a $x \oslash_S y$, existuje $f \in S$ tak, že $f(x) = y$. Protože zároveň $f \in [X]$, je $y \in X$. Buď naopak X S-figura. Nechť $f \in S$. Pak $f[X] \subseteq X$, neboť je-li $x \in X$, je $f(x) \in [x]_{\oslash_S} \subseteq X$. Protože rovněž $f^{-1} \in S$, je splněno i $f^{-1}[X] \subseteq X$, a tedy $f \in [X]$. Dokažme (ii). Nechť F je automorfismus kompatibilní s $S \subseteq [X]$ a $x \in X$. Pak existuje $f \in S$ tak, že $x \in \mathrm{Dom}(f)$ a $f \subseteq F$. Protože $S \subseteq [X]$, je $F(x) = f(x) \in X$ a $F^{-1}(x) = f^{-1}(x) \in X$. Vidíme, že $F[X] \subseteq X$ a $F^{-1}[X] \subseteq X$, tedy $F[X] = X$. Část (iii) plyne ihned (ii) a tvrzení 3.1.32. □

Lemma 3.2.6. *Buď x množina a $S \subseteq [x]$ homogenní oblast. Je-li $f \in S$ a $x \in \mathrm{Dom}(f)$, pak $f(x) = x$.*

Důkaz. Nechť $f \in S$, $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Jelikož $f \in [x]$, je $f(x) = f''x \subseteq x$. Předpokládejme, že existuje $y \in x - f''x$; vyvodíme spor. Protože S je homogenní, existuje $g \in S$ tak, že $g \supseteq f$ a $y \in \mathrm{Rng}(g)$. Označme $z = g^{-1}(y)$. Pak $z \in (g^{-1})''x \subseteq x$, neboť $g^{-1} \in [x]$. To znamená, že $z \in x$, a tudíž $y = g(z) \in g''x = f''x$, čili $y \in f''x$ — spor! □

Definice 3.2.7. Nechť $\Phi = \langle \Phi_i \mid i \in I \rangle$ je soubor oblastí podobností. Řekneme, že Φ je *báze (filtru) oblastí podobností*, jestliže splňuje následující podmínky:

(i) Φ_i je homogenní oblast pro každé $i \in I$,

(ii) Pro každé $i, j \in I$ existuje $k \in I$ tak, že $\Phi_k \subseteq \Phi_i \cap \Phi_j$.

Báze filtrů oblastí podobností budeme krátce nazývat jen *bázemi oblastí*.

Pozorování 3.2.8. *Nechť S je homogenní oblast. Pak soubor $\langle S \rangle$, sestávající z jediné oblasti S, je báze oblastí.*

Definice 3.2.9. Buď $\Phi = \langle \Phi_i \mid i \in I \rangle$ báze oblastí.

(i) Řekneme, že báze Φ je *uzavřená*, jestliže platí

$$(\forall p \subseteq I)(\exists i \in I)(\forall j \in p)(\Phi_i \subseteq \Phi_j).$$

(ii) Řekneme, že třída X je *Φ-invariantní*, jestliže $\Phi_i \subseteq [X]$ pro nějaké $i \in I$. Třídu všech Φ-invariantních množin označme $\Delta(\Phi)$.

Pro libovolnou třídu X dále označme Φ^X následující soubor oblastí:

$$\Phi^X = \langle [\![t]\!] \mid t \text{ je tranzitivní a } t \subseteq X \rangle.$$

Tvrzení 3.2.10. *Buď Φ báze oblastí.*

(i) *Třída $\Delta(\Phi)$ je uzavřená na definování.*

(ii) Je-li X třída definovaná formulí jazyka $<\in>$ s parametry z $\Delta(\Phi)$, je X Φ-invariantní.

(iii) Je-li báze Φ navíc uzavřená, je $\Delta(\Phi)$ kotranzitivní.

(iv) Je-li X třída, je Φ^X uzavřená báze oblastí. Navíc, je-li X tranzitivní, je $X \subseteq \Delta(\Phi^X)$; je-li X současně kotranzitivní, platí $X = \Delta(\Phi^X)$.

(v) Je-li $\Phi = \big\langle S \big\rangle$, kde S je homogenní oblast, je $\mathbf{FIX}_S = \Delta(\Phi)$.

Důkaz. Nechť $\Phi = \langle \Phi_i \mid i \in I \rangle$. Tvrzení (i) je speciálním případem (ii). Nechť X je třída definovaná formulí ϕ z parametrů $p_1, \ldots, p_n \in \Delta(\Phi)$. Je zřejmé, že existuje $i \in I$ tak, že $\Phi_i \subseteq$ $\subseteq [p_1] \cap \ldots \cap [p_n]$. Buď $f \in \Phi_i$ a nechť $\{p_1, \ldots, p_n\} \in \mathrm{Dom}(g)$ pro nějaké $g \supseteq f$, $g \in \Phi_i$. Podle 3.1.4 existuje automorfismus F takový, že $F \supseteq g$, a díky lemmatu 3.2.6 $F(p_k) = g(p_k) = p_k$ pro $k = 1, \ldots, n$. Platí

$$x \in X \Leftrightarrow \varphi(x, p_1, \ldots, p_n) \Leftrightarrow \varphi(F(x), p_1, \ldots, p_n) \Leftrightarrow F(x) \in X,$$

a tudíž $F[X] = X$. Protože $f \subseteq F$, je zřejmě $f''X \subseteq X$ i $(f^{-1})''X \subseteq X$. Vidíme tedy, že X je Φ-invariantní třída.

(iii) Nechť Φ je uzavřená báze oblastí a $u \subseteq \Delta(\Phi)$. Pak existuje $i \in I$ tak, že $\Phi_i \subseteq [x]$ pro každé $x \in u$. Stačí dokázat, že $\Phi_i \subseteq [u]$. Buď $f \in \Phi_i$. Poněvadž Φ_i je homogenní, existuje $g \in \Phi_i$ tak, že $f \subseteq g$ a $u \in \mathrm{Dom}(g)$. Z lemmatu 3.2.6 plyne, že $g(x) = x$ pro každé $x \in u$, platí tedy $g(u) = g''u = u$. Jelikož $f \subseteq g$, je $f''u \subseteq u$ a $(f^{-1})''u \subseteq u$, čili $f \in [u]$.

Část (iv) je triviální pozorování.

(v) Nahlédnout, že Φ^X je báze oblastí pro libovolnou třídu X je snadné. Nechť X je tranzitivní třída a $x \in X$. Označíme-li $t = \mathrm{TC}(\{x\})$, je zřejmě $t \subseteq X$, a tedy $[\![t]\!]$ náleží do Φ^X. Protože $x \subseteq t$, platí $[\![t]\!] \subseteq [\![x]\!]$ a podle 3.2.2 $[\![x]\!] \subseteq [x]$, čili $[\![t]\!] \subseteq [x]$. To znamená, že $x \in \Delta(\Phi^X)$. Předpokládejme, že X je navíc kotranzitivní. Stačí dokázat implikaci $x \notin X \Rightarrow x \notin \Delta(\Phi^X)$. Sporem. Nechť $x \notin X$ a nechť $[\![u]\!] \subseteq [x]$ pro nějakou tranzitivní množinu $u \subseteq X$. Buď $t =$ $= \mathrm{TC}(u \cup \{x\})$. Podle věty o orbitách existuje podobnost f taková, že $\mathrm{Dom}(f) = t$, f je identická na $t \cap X$ a $f(x) \neq x$. Protože $u \subseteq t \cap X$, je $f \in [\![u]\!] \subseteq [x]$. Protože $[\![u]\!]$ je homogenní, je dle lemmatu 3.2.6 $f(x) = x$. To je spor.

Zbývá dokázat (vi). Podle definice je $\Delta(\big\langle S \big\rangle) = \{\, x \mid S \subseteq [x] \,\}$. Nechť $S \subseteq [x]$. Je-li $f \in S$ a $x \in \mathrm{Dom}(f)$, je podle 3.2.6 $f(x) = x$, tedy $x \in \mathbf{FIX}_S$. Nechť $x \in \mathbf{FIX}_S$. Stačí prokázat inkluzi $S \subseteq [x]$. Buď $f \in S$. Jelikož S je homogenní, existuje $g \in S$ tak, že $f \subseteq g$ a $x \in \mathrm{Dom}(g)$. Nyní platí $f''x \subseteq g''x = g(x) = x$, neboť $x \in \mathbf{FIX}_S$. Je zřejmé, že obdobně je možno dokázat $(f^{-1})''x \subseteq x$. Vidíme, že $f \in [x]$. $\square$

Poznámka 3.2.11. Je-li X tranzitivní třída, je $\in$-struktura $\langle X, \in_X \rangle$ extenzionální; je-li navíc X současně kotranzitivní, je $\in$-struktura $\langle X, \in_X \rangle$ úplná, a je tudíž podle Riegerovy věty (2.4.3) interpretací $\mathbf{ZF}_{-}$ v $\mathbf{UT}$ (viz též pozn. 2.7.3). Podle 3.2.10 (iv) jsou takové třídy navíc tvořeny množinami invariantními vůči nějaké bázi oblastí, a tedy vůči nějakému filtru grup automorfismů universa množin.

Poznámka 3.2.12. Na okraj poznamenejme, že řadu tvrzení uvedených v této kapitole bychom mohli „zesílit“, kdybychom místo v $\mathbf{UT}$ pracovali v odpovídajícím rozšíření Gödel-Bernaysovy teorie množin bez axiomu regularity. V takovém případě bychom mohli např. snadno ukázat, že obor tříd invariantních vůči dané bázi Φ, do níž náležejí pouze homogenní oblasti s majorantami řetězů, je uzavřen na morseovské schema ve smyslu následujícího tvrzení: Je-li ϕ libovolná (ne nutně normální) formule jazyka Gödel-Bernaysovy teorie množin s volnou množinovou proměnnou x a případně s parametry, kterými jsou pouze Φ-invariantní třídy resp. množiny, pak

$$(\forall X)[(\forall x)(x \in X \Leftrightarrow \phi(x)) \Rightarrow X \text{ je } \Phi\text{-invariantní}].$$

Pro normální formuli ϕ bychom tak dokázali, že třída $\{\, x \mid \phi(x) \,\}$ je Φ-invariantní. Podobně bychom mohli postupovat i u řady jiných tvrzení.

3.3 Vztah axiomu superuniversality a principu universality

Následující definici a tvrzení využijeme i dále, až se budeme zabývat otázkou jednoduchosti reflexe.

Definice 3.3.1. Je-li u libovolná množina urelementů, označíme $\mathbf{V}\triangle u$ třídu

$$\{\, x \mid \mathrm{TC}(\{x\}) \cap u = \emptyset \,\}.$$

Tvrzení 3.3.2. *Nechť $u \subseteq \mathbf{Ur}$. Pak platí*

(i) Třída $\mathbf{V}\triangle u$ je současně tranzitivní a kotranzitivní.

(ii) $\in$-struktura $\langle \mathbf{V}\triangle u, \in_{\mathbf{V}\triangle u} \rangle$ je superuniversální.

(iii) $\langle \mathbf{V}\triangle u, \in_{\mathbf{V}\triangle u} \rangle \cong \langle \mathbf{V}, \in_{\mathbf{V}} \rangle$.

Důkaz. Tvrzení (i) je zřejmé. Buď $t \subseteq \mathbf{V}\triangle u$ tranzitivní a $\mathfrak{a}$ extenzionální $\in$-struktura taková, že $\langle t, \in_t \rangle \leqslant \mathfrak{a}$. Existuje $t' \supseteq t$ tranzitivní a izomorfismus f $\in$-struktur $\mathfrak{a}$ a $\langle t', \in_{t'} \rangle$ identický na t. Snadno se nahlédne, že existuje podobnost g taková, že $\mathrm{Dom}(g) = t'$, g je identická na t a pro každé $x \in t' \cap u$ je $g(x) \in \mathbf{Ur} - u$. Zobrazení $g \circ f$ je izomorfismus $\in$-struktur $\mathfrak{a}$ a $\langle \mathrm{Rng}(g), \in_{\mathrm{Rng}(g)} \rangle$ identický na t a $\mathrm{Rng}(g) \subseteq \mathbf{V}\triangle u$. Vidíme tedy, že $\in$-struktura $\langle \mathbf{V}\triangle u, \in_{\mathbf{V}\triangle u} \rangle$ je superuniversální. Speciálně je podle 2.5.3 $\langle \mathbf{V}\triangle u, \in_{\mathbf{V}\triangle u} \rangle \cong \langle \mathbf{V}, \in_{\mathbf{V}} \rangle$. □

Tvrzení 3.3.3. *Axiom superuniversality je silnější než princip universality.*

Důkaz. Z axiomu superuniversality snadno vyplývá, že pro každé x existuje množina $y \neq$ $\neq x$ tak, že $y = \{x, y\}$. Buď v libovolný urelement. Třída $\mathbf{V}\triangle\{v\}$ je podle 3.3.2 tranzitivní, kotranzitivní a spolu s relací $\in_{\mathbf{V}\triangle\{v\}}$ tvoří superuniversální $\in$-strukturu. Speciálně lze každou extenzionální $\in$-strukturu izomorfně zobrazit na nějakou tranzitivní podtřídu $\mathbf{V}\triangle\{v\}$. Buď $M = \mathbf{WF}(\{v\} \cup (\mathbf{V}\triangle\{v\}))$. $\in$-struktura $\langle M, \in_M \rangle$ je modelem (interpretací) $\mathbf{ZFS}_{\text{-}}$ a platí pro ni princip universality, neboť každou $\in$-strukturu lze izomorfně zobrazit na tranzitivní podtřídu M. V $\langle M, \in_M \rangle$ však neplatí axiom superuniversality, neboť zřejmě neexistuje množina $y \in M$, $y \neq v$ taková, že $y = \{v, y\}$. □

Kapitola 4

Endomorfismy a reflexe

V **ZFC** je existence netriviálního elementárního vnoření H universální třídy do nějaké tranzitivní třídy W ekvivalentní s existencí měřitelného kardinálu. Třídu W lze v takovém případě sestrojit pomocí Mostowského věty o kolapsu jako tranzitivní třídu izomorfní s ultramocninou universální třídy podle ultrafiltru Z, který je mírou. Elementární vnoření H potom získáme složením takto získaného izomorfismu a kanonického vnoření universa do ultramocniny. Existence měřitelného kardinálu (resp. míry Z) je vynucena požadavkem fundovanosti zmíněné ultramocniny a potažmo axiomem regularity. Díky principu universality lze popsanou konstrukci v **UT** realizovat, aniž bychom předpokládali, že ultrafiltr Z je míra.

Dvojici $\langle H, W\rangle$, kde H je elementární vnoření do třídy W, která je tranzitivní a skorouniversální, nazýváme reflexí; říkáme, že $\langle H, W\rangle$ je κ-reflexe, má-li každá centrovaná podmnožina třídy W kardinality menší než κ neprázdný průnik. Tuto vlastnost lze zaručit např. tak, že za Z zvolíme ultrafiltr, který je κ-dobrý.

κ-reflexe umožňují přirozeně interpretovat nestandardní pojmy — standardní universum jako $\mathrm{Rng}(H)$ a internální jako W — a nestandardní principy (přenosu, standardizace, finitarizace, atd.). Značnou výhodou tohoto přístupu oproti jiným je přítomnost externálního („vnějšího") universa splňujícího všechny axiomy **UT**, které je navíc izomorfní s universem standardním. Na tyto možnosti asi jako první upozornili Ballard a Hrbáček v [3]; my zde tento koncept jen stručně rekapitulujeme a v jeho rámci se pak věnujeme dalším otázkám. Zejména jde o problém kardinálního kolapsu, tj. přibližně o otázku, zda pro daný kardinál κ mohou mít internálně nekonečné množiny internální kardinality nejvýše $H(\kappa)$ „vnější" kardinalitu κ, a dále o problém jednoduchosti reflexe, tj. o otázku, zda lze universum W libovolné reflexe $\langle H, W\rangle$ získat „jednoduchou adjunkcí" jediného prvku k $\mathrm{Rng}(H)$, jak je tomu v případě reflexe získané pomocí ultramocniny. Věnujeme se rovněž principu kategoričnosti; ten nám dovolí (případně v kombinaci s kardinálním kolapsem) učinit určité závěry o struktuře orbitální monády nestandardních přirozených čísel. Ukážeme také, že oborem všech množin bodově invariantních vůči reflexím, je právě množina všech (regulárních) dědičně konečných množin p_ω.

V celé této kapitole budeme pracovat výhradně v **UT**.

4.1 Elementární vnoření, reflexe

Nejprve zavedeme potřebné značení a připomeneme několik pojmů.

Definice 4.1.1. Nechť $\mathfrak{A}$ je $\in$-struktura a φ formule jazyka $<\in>$ se všemi volnými proměnnými mezi $x_1, \dots, x_n$. Nechť * je kanonická $\mathfrak{A}$-interpretace jazyka $<\in>$ v **UT**. Řekneme, že formule φ *je splněna (platí) v* $\mathfrak{A}$ o prvcích $a_1, \dots, a_n \in A$, jestliže platí $\varphi^*(a_1, \dots, a_n)$. V tom případě budeme psát

$$\varphi^{(\mathfrak{A})}(a_1, \dots, a_n).$$

Úmluva 4.1.2. Buď X třída a φ libovolná formule jazyka $<\in>$ s parametry z X. Místo $\varphi^{(\langle X, \in_X \rangle)}$ budeme psát jen φ^X (viz též ekvivalentní definici 2.4.10). Řekneme, že formule φ *platí v* X, jestliže je splněna v $\langle X, \in_X \rangle$, tedy platí-li φ^X.

Definice 4.1.3. Buďte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $\in$-struktury a $F\colon A \to B$ zobrazení. Řekneme, že F je *elementární vnoření* $\in$-struktury $\mathfrak{A}$ do $\mathfrak{B}$, jestliže pro každou formuli φ jazyka $<\in>$ se všemi volnými proměnnými mezi $x_1, \dots, x_n$ a pro každé $a_1, \dots, a_n \in A$ platí

$$\varphi^{(\mathfrak{A})}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \varphi^{(\mathfrak{B})}(F(a_1), \dots, F(a_n)).$$

Řekneme dále, že $\in$-struktury $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ jsou *elementárně ekvivalentní*, jestliže pro každou sentenci φ jazyka $<\in>$ platí

$$\varphi^{(\mathfrak{A})} \Leftrightarrow \varphi^{(\mathfrak{B})}.$$

Konečně, jestliže $A \subseteq B$, řekneme, že $\mathfrak{A}$ je *elementární podstrukturou* $\in$-struktury $\mathfrak{B}$ (značíme $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$), je-li zobrazení $\mathbf{Id} \restriction A\colon A \to B$ elementárním vnořením $\in$-struktury $\mathfrak{A}$ do $\mathfrak{B}$.

Pozorování 4.1.4. *Nechť $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ jsou $\in$-struktury.*

(i) Je-li F elementární vnoření $\in$-struktury $\mathfrak{A}$ do $\mathfrak{B}$, je F prosté zobrazení a pro každé $x, y \in A$ platí $x \in^A y \Leftrightarrow F(x) \in^B F(y)$; v tom případě jsou navíc $\in$-struktury $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ elementárně ekvivalentní.

(ii) Jsou-li $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ elementárně ekvivalentní a $\mathfrak{A}$ je extenzionální, je i $\mathfrak{B}$ extenzionální.

Definice 4.1.5. Nechť W je třída.

(i) Řekneme, že třída W je *skorouniversální*, jestliže platí

$$(\forall u \subseteq W)(\exists v \in W)(u \subseteq v).$$

(ii) Buď W tranzitivní a κ nespočetný kardinál. Řekneme, že W je *κ-saturovaná*, platí-li

$$(\forall X \subseteq W)((X \text{ je centrovaná } \& \ |X| < \kappa) \Rightarrow \bigcap X \neq \emptyset).$$

(iii) Je-li W tranzitivní a $F\colon \mathbf{V} \to W$ elementární vnoření $\in$-struktury $\langle \mathbf{V}, \in_{\mathbf{V}} \rangle$ do $\langle W, \in_W \rangle$, řekneme, že F je *elementární vnoření (universální třídy do W)*.

(iv) Dvojici $\langle H, W \rangle$ nazveme *reflexí*, je-li W tranzitivní a skorouniversální třída a H elementární vnoření universální třídy do W. Je-li navíc třída W κ-saturovaná, nazveme $\langle H, W \rangle$ *κ-reflexí.*

Pozorování 4.1.6. *Je-li $\langle H, W\rangle$ reflexe a $U = \mathrm{Rng}(H)$, je zobrazení H izomorfismus $\in$-struktur $\langle \mathbf{V}, \in_{\mathbf{V}}\rangle$ a $\langle U, \in_U\rangle$. $\in$-struktura $\langle U, \in_U\rangle$ je tak modelem (interpretací)* $\mathbf{ZFC}_{-}$. *Protože H je elementární vnoření, jsou $\in$-struktury $\langle \mathbf{V}, \in_{\mathbf{V}}\rangle$, $\langle W, \in_W\rangle$ speciálně elementárně ekvivalentní, a tudíž i $\langle W, \in_W\rangle$ je modelem (interpretací)* $\mathbf{ZFC}_{-}$.

Konstrukcí saturovaných reflexí se budeme zabývat v odstavcích 4.2 a 4.3. Nyní shrneme některé jejich vlastnosti, které jsou základem pro užití nestandardních metod v **UT**. Ve zbytku odstavce předpokládáme, že $\boldsymbol{\kappa}$ je nějaký pevně zvolený nespočetný kardinál, $\langle \mathbf{H}, \mathbf{W}\rangle$ je nějaká pevně zvolená $\boldsymbol{\kappa}$-reflexe a $\mathbf{U} = \mathrm{Rng}(\mathbf{H})$.

Zobrazení $\mathbf{H}$ je izomorfismem $\in$-struktur $\langle \mathbf{V}, \in_{\mathbf{V}}\rangle$ a $\langle \mathbf{U}, \in_{\mathbf{U}}\rangle$. Třídu $\mathbf{U}$ nazýváme *standardním universem (množin)* a řekneme, že x je *standardní množina*, jestliže $x \in \mathbf{U}$. Prvky standardních množin, které nejsou standardní budeme nazývat *nestandardními množinami.*

Třídu $\mathbf{W}$ nazýváme *internálním universem* a její prvky *internálními množinami.* Budeme-li chtít zdůraznit, že daná množina nepatří nutně do $\mathbf{W}$, řekneme, že je *externální.* Třídu $\mathbf{V}$ budeme v těchto intencích označovat jako *externální universum.* Vztah mezi standardním, internálním a externálním universem znázorňuje obrázek:

$$\begin{tikzcd} \langle \mathbf{U}, \in_{\mathbf{U}}\rangle \arrow[r, phantom, "\preccurlyeq"] & \langle \mathbf{W}, \in_{\mathbf{W}}\rangle \arrow[r, phantom, "\leq"] & \langle \mathbf{V}, \in_{\mathbf{V}}\rangle \arrow[ll, bend left, "\text{izomorfismus}"', "\mathbf{H}"] \end{tikzcd}$$

Nechť φ je formule jazyka $<\in>$ a nechť $a_1, \ldots, a_n$ jsou standardní (resp. internální) množiny. Řekneme, že formule φ *platí standardně* (resp. *internálně*), jestliže platí $\varphi^{\mathbf{U}}(a_1, \ldots, a_n)$ (resp. $\varphi^{\mathbf{W}}(a_1, \ldots, a_n)$).

Pro každé $x_1, \ldots, x_n$ platí

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \varphi^{\mathbf{U}}(\mathbf{H}(x_1), \ldots, \mathbf{H}(x_n)) \Leftrightarrow \varphi^{\mathbf{W}}(\mathbf{H}(x_1), \ldots, \mathbf{H}(x_n)).$$

Je-li navíc formule φ omezená, je díky tranzitivitě třídy $\mathbf{W}$ pro každé $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{W}$ splněno

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \varphi^{\mathbf{W}}(x_1, \ldots, x_n).$$

Pozorování 4.1.7. *Buď X libovolná množina. Pak platí:*

(i) $\mathbf{H}(X) \cap \mathbf{U} = \mathbf{H}[X]$, *a tedy* $|\mathbf{H}(X) \cap \mathbf{U}| = |X|$.

(ii) Zobrazení $\mathbf{H}$ je identické na p_ω.

(iii) Je-li $X \in \mathbf{U}$, pak X je standardně konečná tehdy a jen tehdy, je-li konečná.

(iv) Nechť X je konečná. Jestliže $X \subseteq \mathbf{U}$, je $X \in \mathbf{U}$; jestliže $X \subseteq \mathbf{W}$, je $X \in \mathbf{W}$.

Definice 4.1.8. Je-li X množina, označme $[X]^{<\omega}$ množinu všech konečných podmnožin množiny X.

Tvrzení 4.1.9. *Každá nekonečná standardní množina má nestandardní prvek.*

Důkaz. Nechť $Y = \mathbf{H}(X)$, kde $[Y \text{ je spočetná}]^{\mathbf{U}}$. Pak X a $Y \cap \mathbf{U} = \mathbf{H}[X]$ jsou spočetné množiny. Z $\boldsymbol{\kappa}$-saturovanosti třídy $\mathbf{W}$ plyne, že existuje $y \in \bigcap\{\, Y - t \mid t \in [Y \cap \mathbf{U}]^{<\omega} \,\}$. Množina y je zřejmě nestandardním prvkem množiny Y. $\square$

Je zřejmé, že chceme-li zkoumat vlastnosti nějaké množiny x, je lhostejno, zda zkoumáme ji samu (v universu $\mathbf{V}$) či zda pracujeme s její izomorfní kopií $H(x)$ uvnitř standardního universa $\mathbf{U}$ nebo dokonce uvnitř internálního universa $\mathbf{W}$. Nestandardní metody přitom těží především z častého přecházení mezi těmito světy množin — nejčastěji mezi standardním universem a internálním universem — a také z možnosti vydělovat různé externální části standardního či internálního universa.

Nyní vyslovíme a dokážeme několik tzv. nestandardních principů, o které se v různých podobách opírá většina úvah užívajících nestandardních metod. První dva principy již netřeba dokazovat.

Princip přenosu [1]

Internální universum je elementárním rozšířením standardního universa.

Princip $\boldsymbol{\kappa}$-saturovanosti

Internální universum je $\boldsymbol{\kappa}$-saturovaná třída.

Princip standardizace

Nechť $X \subseteq \mathbf{U}$ je množina. Pak existuje $x \in \mathbf{U}$ tak, že $X = x \cap \mathbf{U}$.

Důkaz. Stačí položit $x = \mathbf{H}(\mathbf{H}^{-1}[X])$. □

Říkáme, že množina x je (vznikne) *standardizací* množiny X, jestliže platí $x = X \cap \mathbf{U}$. Každá (externální) množina má tak právě jednu standardizaci.

Princip $\boldsymbol{\kappa}$-finitarizace

$(\forall X \subseteq \mathbf{W})(|X| < \boldsymbol{\kappa} \Rightarrow (\exists u \in \mathbf{W})(u \text{ je internálně konečná } \& \ X \subseteq u))$.

Důkaz. Nechť $X \subseteq \mathbf{W}$ je množina kardinality menší než $\boldsymbol{\kappa}$. Protože $\mathbf{W}$ je skorouniversální, existuje $y \in \mathbf{W}$ tak, že $X \subseteq y$. Pro každou (externálně) konečnou množinu $t \subseteq X$ definujme internálně množinu $a_t = \{\, z \subseteq y \mid t \subseteq z \ \&\ z \text{ je konečná} \,\}$ a položme (externálně) $Y = \{\, a_t \mid t \subseteq y \text{ je konečná} \,\}$. Pak $Y \subseteq \mathbf{W}$, Y je centrovaná a $|Y| < \boldsymbol{\kappa}$. Z principu $\boldsymbol{\kappa}$-saturovanosti tudíž vyplývá, že existuje $u \in \bigcap Y$. Množina u je internálně konečná a $X \subseteq$ $\subseteq u$, protože $u \in a_{\{x\}}$ pro každé $x \in X$. □

Definice 4.1.10. Buď $\langle H, W \rangle$ reflexe. Označme $U = \mathrm{Rng}(H)$. Řekneme, že reflexe $\langle H, W \rangle$ je *jednoduchá*, jestliže existují množiny $D \in J \in U$ tak, že $W = U[J, D]$, kde

$$U[J, D] = \{\, g(D) \mid g \in U \ \&\ (g \text{ je zobrazení } \& \ \mathrm{Dom}(f) = J)^U \,\}.$$

Pozorování 4.1.11. *Je-li $\langle H, W \rangle$ jednoduchá reflexe, je $W = \bigcup \mathrm{Rng}(H)$.*

Jednoduchost reflexe $\langle H, W \rangle$ můžeme interpretovat tak, že třída W vznikla z $U = \mathrm{Rng}(H)$ jistou adjunkcí jediného „ideálního“ prvku D. Jednoduchým reflexím je věnován odstavec 4.5. Nyní poukážeme jen na jejich dvě zajímavé vlastnosti. Předpokládejme tedy, že reflexe $\langle \mathbf{H}, \mathbf{W} \rangle$, kterou jsme v začátku odstavce pevně zvolili, je navíc jednoduchá. Pak platí:

Princip rozšíření [2]

$(\forall X \in \mathbf{U})(\forall f\colon X \cap \mathbf{U} \to \mathbf{W})(\exists g \in \mathbf{W})(g \text{ je zobrazení } \& \ g \supseteq f)$.

[1] angl. *Transfer Principle.*
[2] angl. *Extension Principle*

Důkaz. Nechť $D \in J \in \mathbf{U}$ jsou takové, že $\mathbf{W} = \mathbf{U}[J, D]$. Buď X standardní množina a $f\colon X \cap \mathbf{U} \to \mathbf{W}$ libovolné. Díky jednoduchosti existuje pro každé $x \in X \cap \mathbf{U}$ standardní zobrazení $u_x \in \mathbf{U}$ takové, že $\mathrm{Dom}(u_x) = J$ a $u_x(D) = f(x)$. Označme h standardizaci množiny $\{\langle x, u_x\rangle \mid x \in X \cap \mathbf{U}\}$. Pak h je standardní zobrazení a pro každé $u \in \mathrm{Rng}(h)$ je u internální zobrazení, $\mathrm{Dom}(u) = J$. Internálně nyní můžeme definovat zobrazení g tak, že $g(x) = (h(x))(D)$ pro každé $x \in X = \mathrm{Dom}(h)$. Snadno se nahlédne, že g je internální zobrazení a $g \supseteq f$. □

Poznámka 4.1.12. Pro standardní množiny X takové, že $|X \cap \mathbf{U}| < \boldsymbol{\kappa}$, lze princip rozšíření dokázat snadno z principu $\boldsymbol{\kappa}$-saturovanosti i bez užití jednoduchosti. Je dobré si také uvědomit, že v uvedeném důkazu jsme se na saturovanost třídy $\mathbf{W}$ neodvolali, užili jsme totiž pouze jednoduchosti uvažované reflexe a principů přenosu a standardizace, které platí v každé reflexi. Následující věta ukazuje, že každá jednoduchá reflexe, která není identická na prvku ω, je již nutně $\boldsymbol{\aleph}_1$-saturovaná.

Tvrzení 4.1.13. *Nechť $\langle H, W\rangle$ je libovolná jednoduchá reflexe taková, že $H(\omega) \neq \omega$. Pak třída W je $\boldsymbol{\aleph}_1$-saturovaná.*

Důkaz. Označme $U = \mathrm{Rng}(H)$. Nechť $\langle X_n \mid n \in \omega\rangle$ je spočetný systém neprázdných množin takový, že $X_{n+1} \subseteq X_n$, $X_n \in W$ pro každé $n \in \omega$. Stačí dokázat, že $\bigcap_{n\in\omega} X_n \neq \emptyset$. Definujme zobrazení $f\colon \omega \to W$ tak, že $f(n) = X_n$ pro každé $n \in \omega$. Protože reflexe $\langle H, W\rangle$ je jednoduchá a $\omega = H(\omega) \cap U$, existuje podle principu rozšíření zobrazení $g \in W$ tak, že $g \supseteq f$. Navíc lze předpokládat, že $\mathrm{Dom}(g) \subseteq H(\omega)$ (jinak vezmeme místo g zobrazení $g \restriction H(\omega)$). Protože $H(\omega) \neq \omega$, existuje prvek $\nu \in H(\omega) - \omega$. Ve W definujme množinu

$$A = \{\mu \in H(\omega) \mid \mu \in \mathrm{Dom}(g)\ \&\ \mu \leq \nu\ \&\ f(\mu) \neq \emptyset\ \&\ (\forall \xi < \mu)(f(\xi+1) \subseteq f(\xi))\}.$$

Snadno se nahlédne, že $\omega \subseteq A \in W$. Jelikož platí $[A \subseteq H(\omega)$ je omezená$]^W$, existuje prvek $\mu_0 \in A$ tak, že $[\mu_0$ je největší prvek množiny$A]^W$. Zřejmě platí $\bigcap_{n\in\omega} X_n \supseteq f(\mu_0) \neq \emptyset$. □

Posledním z principů, jež zde uvádíme, je princip $\boldsymbol{\kappa}$-kategoričnosti [3], kterým se v poněkud jiném kontextu zabývá článek [9]. Tento princip se od předchozích liší tím, že je formulován pomocí pojmů užívaných v teorii modelů. Teorie modelů je obvykle budována na základě nějaké teorie množin. V našem případě touto teorií bude **UT**. V ní můžeme obvyklým způsobem zavést (tj. formalizovat) predikátovou logiku s rovností a pojmy jako jazyk, formule, teorie, dokazatelnost, model, atd. Ve zbytku tohoto odstavce budeme těchto pojmů užívat právě v tomto (formalizovaném) smyslu. Jejich přesné definice lze nalézt např. v knize [5]. Pro pořádek ještě dodejme, že pod tyto pojmy zahrnujeme pouze množiny.

Úmluva 4.1.14. Formalizované modely budeme označovat gotickými písmeny $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \ldots$ a jejich nosiče odpovídajícími písmeny $M, N, \ldots$ Bude-li $\mathfrak{M}$ model jazyka $\mathfrak{L}$ a s nějaký symbol resp. term jazyka $\mathfrak{L}$, označíme s^M interpretaci symbolu resp. termu s v modelu $\mathfrak{M}$.

Nežli vyslovíme zmíněný princip, bude užitečné zavést několik dalších pojmů a označení.

Definice 4.1.15. Buď $\mathfrak{M}$ model jazyka $\mathfrak{L}$. Symbolem $\|\mathfrak{M}\|$ označujme kardinál $\boldsymbol{\aleph}_0 \cdot |M|$. Nechť S je množina všech symbolů jazyka $\mathfrak{L}$. Označme $\|\mathfrak{L}\| = \boldsymbol{\aleph}_0 \cdot |S|$. Nechť Y je množina. Symbolem $\mathfrak{L}_Y$ označme jazyk, získaný zbohacením jazyka $\mathfrak{L}$ o množinu $\{c_y \mid y \in Y\}$ nových

[3]angl. *Isomorphism Property*

symbolů pro konstanty tak, že $c_{y_1} \neq c_{y_2}$ pro $y_1 \neq y_2$, $y_1, y_2 \in Y$. Je-li $F\colon Y \to M$ zobrazení, označme symbolem $\langle \mathfrak{M}, F(y)\rangle_{y\in Y}$ model $\mathfrak{N}$ jazyka $\mathcal{L}_Y$ takový, že $N = M$, $s^N = s^M$ pro každý symbol jazyka $\mathcal{L}$ a navíc $c_y^N = F(y)$ pro každé $y \in Y$.

Definice 4.1.16. Pro jazyk $\mathcal{L}$ a každé $n \in \omega$ označujme symbolem $\mathcal{F}_n(\mathcal{L})$ množinu všech formulí jazyka $\mathcal{L}$, jejichž všechny volné proměnné jsou mezi $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$.

Definice 4.1.17. Buďte $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ modely jazyka $\mathcal{L}$.

(i) Řekneme, že zobrazení $F\colon M \to N$ je *izomorfismus* $\mathfrak{M}$ a $\mathfrak{N}$, jestliže je vzájemně jednoznačným zobrazením množiny M na N a platí: Je-li s $(n-1)$-ární funkční resp. n-ární predikátový symbol jazyka $\mathcal{L}$ a $a_0, \ldots, a_{n-1} \in M$, pak

$$\langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle \in s^M \Leftrightarrow \langle F(a_0), \ldots, F(a_{n-1})\rangle \in s^N.$$

Pokud existuje izomorfismus $\mathfrak{M}$ a $\mathfrak{N}$, říkáme, že modely $\mathfrak{M}$ a $\mathfrak{N}$ jsou *izomorfní* (značíme $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$).

(ii) Řekneme, že zobrazení $F\colon M \to N$ je *elementární vnoření* modelu $\mathfrak{M}$ do $\mathfrak{N}$, jestliže pro každou formuli $\phi \in \mathcal{F}_n(\mathcal{L})$ a každé $a_0, \ldots, a_{n-1} \in M$ platí

$$\mathfrak{M} \models \phi[a_0, \ldots, a_{n-1}] \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \phi[F(a_0), \ldots, F(a_{n-1})]$$

(iii) Řekneme, že modely $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ jsou *elementárně ekvivalentní* (značíme $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$), jestliže pro každou uzavřenou formuli (tj. sentenci) ϕ jazyka $\mathcal{L}$ platí

$$\mathfrak{M} \models \phi \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \phi.$$

Pozorování 4.1.18. *Modely $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ jazyka $\mathcal{L}$ jsou izomorfní právě tehdy, když existuje zobrazení F množiny M na N tak, že $\langle \mathfrak{M}, a\rangle_{a\in M} \equiv \langle \mathfrak{N}, F(a)\rangle_{a\in M}$*

Definice 4.1.19. Nechť $\mathfrak{M}$ je model jazyka $\mathcal{L}$ (externálně). Řekneme, že $\mathfrak{M}$ je *internálně prezentovaný*, jestliže M i interpretace s^M každého symbolu s jazyka $\mathcal{L}$ v $\mathfrak{M}$ jsou internální množiny.

Definice 4.1.20. Buď $\mathfrak{M}$ model jazyka $\mathcal{L}$, a ϕ formule jazyka $\mathcal{L}$ se všemi volnými proměnnými mezi $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $(n \in \omega)$, označme

$$D_\phi^{M^n} = \{\, \langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in M^n \mid \mathfrak{M} \models \phi[a_1, \ldots, a_n] \,\}.$$

Indukcí dle složitosti lze díky uzavřenosti internálního universa $\mathbf{W}$ na gödelovské operace snadno dokázat:

Pozorování 4.1.21. *Buď $\mathfrak{M}$ internálně prezentovaný model jazyka $\mathcal{L}$.*

(i) Je-li t term jazyka $\mathcal{L}$, je t^M internální.

(ii) Pro každou formuli ϕ jazyka $\mathcal{L}$ se všemi volnými proměnnými mezi $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $(n \in \omega)$ je $D_\phi^{M^n}$ internální.

Princip $\boldsymbol{\kappa}$-kategoričnosti

Nechť $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ jsou internálně prezentované modely jazyka $\mathcal{L}$, $\|\mathcal{L}\| < \boldsymbol{\kappa}$ a nechť $\|\mathfrak{M}\| = \|\mathfrak{N}\| \leq \boldsymbol{\kappa}$. Pak platí $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N} \Rightarrow \mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$.

Důkaz. Podle 4.1.18 stačí sestrojit zobrazení F množiny M na N tak, aby $\langle \mathfrak{M}, a\rangle_{a\in M} \equiv$ $\equiv \langle \mathfrak{N}, F(a)\rangle_{a\in M}$. Nechť G je prosté zobrazení takové, že $\mathrm{Dom}(G) \subseteq M$, $\mathrm{Rng}(G) \subseteq N$, $|G| < \boldsymbol{\kappa}$ a $\langle \mathfrak{M}, a\rangle_{a\in \mathrm{Dom}(G)} \equiv \langle \mathfrak{N}, G(a)\rangle_{a\in \mathrm{Dom}(G)}$. Buď $c \in M$. Ukážeme, že existuje $d \in N$ takové, že pro $G' = G \subseteq \{\langle c, d\rangle\}$ platí

$$\langle \mathfrak{M}, a\rangle_{a\in \mathrm{Dom}(G')} \equiv \langle \mathfrak{N}, G'(a)\rangle_{a\in \mathrm{Dom}(G')}. \tag{4.1}$$

Je-li $\phi \in \mathfrak{F}_{n+1}(\mathfrak{L})$ a $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{Dom}(G)$, pak platí

$$\mathfrak{M} \models \phi[c, a_1, \ldots, a_n] \Rightarrow \mathfrak{N} \models (\exists \xi_0)\phi[d, G(a_1), \ldots, G(a_n)].$$

Pro každou formuli $\phi \in \mathfrak{F}_{n+1}(\mathfrak{L})$ jazyka $\mathfrak{L}$ a každé $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{Dom}(G)$ buď

$$D^N(\phi, a_1, \ldots, a_n) = \{\, d \in N \mid \mathfrak{N} \models \phi[d, G(a_1), \ldots, G(a_n)] \,\}.$$

Snadno se nahlédne, že systém množin

$$\begin{aligned} X = \{\, D^N(\phi, a_1, \ldots, a_n) \mid n \in \omega \ \&\ \phi \in \mathfrak{F}_{n+1}(\mathfrak{L})\ \& \\ \&\ \langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in (\mathrm{Dom}(G))^n \ \&\ \mathfrak{M} \models \phi[c, a_1, \ldots, a_n] \,\} \end{aligned}$$

je centrovaný, $X \subseteq \mathbf{W}$ a $|X| < \boldsymbol{\kappa}$. Podle principu $\boldsymbol{\kappa}$-saturovanosti tudíž existuje prvek $d \in \bigcap X$. Je zřejmé, že zobrazení $G' = G \cup \{\langle c, d\rangle\}$ splňuje podmínku (4.1). Zcela analogicky lze naopak pro každé $d \in N$ nalézt $c \in M$ tak, aby zobrazení $G' = G \cup \{\langle c, d\rangle\}$ splňovalo podmínku (4.1). Sestrojit zobrazení F zmíněné na začátku důkazu je tedy snadné. □

Tvrzení 4.1.22. *Buď $\mathfrak{M}$ model pro jazyk $\mathfrak{L}$. Pak existuje internálně prezentovaný model $\mathfrak{N}$ takový, že $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$.*

Důkaz. Položme $N = \mathbf{H}(M)$ a $s^N = \mathbf{H}(s^M)$ pro každý symbol s jazyka $\mathfrak{L}$. Zřejmě je $\mathfrak{N}$ model pro jazyk $\mathfrak{L}$, který je internálně prezentovaný. Snadno se nahlédne, že $\mathbf{H} \restriction M$ je elementární vnoření modelu $\mathfrak{M}$ do $\mathfrak{N}$. Speciálně tedy $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$. □

4.2 Ultraprodukty a ultramocniny $\in$-struktur

Definice 4.2.1. Buď I množina, $\langle \mathfrak{A}_i \mid i \in I\rangle$ soubor $\in$-struktur a Z libovolný ultrafiltr na I. Na třídě $\prod_{i\in I} A_i$ definujeme ekvivalenci $=_Z$ takto:

$$f =_Z g \Leftrightarrow \{\, i \in I \mid f(i) = g(i) \,\} \in Z.$$

Označme π_Z kvocientové zobrazení třídy $\prod_{i\in I} A_i$ podle $=_Z$ a $\prod_{I/Z} A_i$ faktorovou třídu $(\prod_{i\in I} A_i)/=_Z$. Pro každé $f, g \in \prod_{I/Z} A_i$ definujme

$$f \in_Z g \Leftrightarrow \{\, i \in I \mid f(i) \in^{A_i} g(i) \,\} \in Z.$$

Dvojice $\langle \prod_{I/Z} A_i, \in_Z\rangle$ tvoří $\in$-strukturu, kterou označíme $\prod_{I/Z} \mathfrak{A}_i$ a nazýváme *ultraproduktem* souboru $\in$-struktur $\langle \mathfrak{A}_i \mid i \in I\rangle$. Speciální případ ultraproduktu, kdy $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$ pro každé $i \in I$, nazýváme *ultramocninou* $\in$-struktury $\mathfrak{A}$ a označujeme jej jednoduše $\mathfrak{A}_Z$. Nosič $\in$-struktury $\mathfrak{A}_Z$ označujeme A_Z.

Úmluva 4.2.2. Bude-li z kontextu zřejmé, o který soubor $\in$-struktur $\langle \mathfrak{A}_i \mid i \in I \rangle$ nám jde, budeme i nadále užívat označení relace $\in_Z$ z předešlé definice; v takovém případě budeme dále pro libovolnou formuli φ jazyka $<\in>$ místo $\varphi^{(\prod_{I/Z} \mathfrak{A}_i)}$ psát jednoduše φ_Z. Bude-li navíc z kontextu patrné, který ultrafiltr máme na mysli, budeme místo $\pi_Z(f)$, kde π_Z je kvocientové zobrazení z předchozí definice, psát jen $\bar{f}$.

Věta 4.2.3 (Łoš). *Nechť Z je ultrafiltr na množině I, $\langle \mathfrak{A}_i \mid i \in I \rangle$ soubor $\in$-struktur, φ formule jazyka $<\in>$ se všemi volnými proměnnými mezi $x_1, \dots, x_n$ a $f_1, \dots, f_n \in \prod_{i \in I} A_i$ libovolné. Pak*

$$\varphi_Z(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n) \Leftrightarrow \{\, i \in I \mid \varphi^{(\mathfrak{A}_i)}(f_1(i), \dots, f_n(i)) \,\} \in Z.$$

Důkaz. Indukcí podle složitosti formule φ. Je-li φ atomická, vyplývá tvrzení přímo z definice relace $\in_Z$. Je-li φ tvaru $\psi \mathbin{\&} \eta$, přičemž pro ψ a η již tvrzení platí, dostáváme

$$\begin{gathered}
(\psi \mathbin{\&} \eta)_Z(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n) \Leftrightarrow \psi_Z(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n) \mathbin{\&} \eta_Z(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \{\, i \in I \mid \psi^{(\mathfrak{A}_i)}(f_1(i), \dots, f_n(i)) \,\} \cap \{\, i \in I \mid \eta^{(\mathfrak{A}_i)}(f_1(i), \dots, f_n(i)) \,\} \in Z \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \{\, i \in I \mid (\psi \mathbin{\&} \eta)^{(\mathfrak{A}_i)}(f_1(i), \dots, f_n(i)) \,\} \in Z
\end{gathered}$$

Analogicky pro φ tvaru $\neg\psi$ popř. $\psi \vee \eta$. Nechť je φ tvaru $(\exists x)\psi$ a nechť pro ψ tvrzení platí. Potom (s užitím axiomu výběru)

$$\begin{gathered}
\varphi_Z(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n) \Leftrightarrow \big(\exists f \in \prod_{i \in I} A_i\big)\big(\psi_Z(\bar{f}, \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n)\big) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \big(\exists f \in \prod_{i \in I} A_i\big)\big(\{\, i \in I \mid \psi^{(\mathfrak{A}_i)}(f(i), f_1(i), \dots, f_n(i)) \,\} \in Z\big) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \{\, i \in I \mid (\exists a \in A_i)\psi^{(\mathfrak{A}_i)}(a, f_1(i), \dots, f_n(i)) \,\} \in Z \Leftrightarrow \{\, i \in I \mid \varphi^{(\mathfrak{A}_i)}(f_1(i), \dots, f_n(i)) \,\} \in Z.
\end{gathered}$$

□

Důsledek 4.2.4. *Je-li I množina, $\langle \mathfrak{A}_i \mid i \in I \rangle$ soubor extenzionálních $\in$-struktur a Z libovolný ultrafiltr na I, je ultraprodukt $\prod_{I/Z} \mathfrak{A}_i$ extenzionální $\in$-struktura.*

Definice 4.2.5. Je-li A třída a Z ultrafiltr na množině I. Definujeme *kanonické vnoření* $K \colon A \to A_Z$ tak, že pro $a \in A$ položíme $K(a) = \bar{k}_a$, kde $k_a = I \times \{a\}$.

Tvrzení 4.2.6. *Je-li $\mathfrak{A}$ $\in$-struktura, je kanonické vnoření K elementárním vnořením $\mathfrak{A}$ do $\mathfrak{A}_Z$; speciálně jsou $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{A}_Z$ elementárně ekvivalentní.*

Důkaz. Plyne ihned z lemmatu 4.2.3. □

Definice 4.2.7. Nechť Z je ultrafiltr na množině I a κ nekonečný kardinál.

(i) Ultrafiltr Z se nazývá *κ-úplný*, jestliže každá jeho část mohutnosti menší než κ má neprázdný průnik. Není-li Z κ-úplný, nazývá se *κ-neúplný*.

(ii) Ultrafiltr Z se nazývá *κ-regulární*, jestliže existuje $X \subseteq Z$, $|X| = \kappa$ tak, že

$$(\forall Y \subseteq X)(|Y| \geq \omega \Rightarrow \bigcap Y = \emptyset).$$

(iii) Buďte P,Q libovolné množiny, $f, g\colon [P]^{<\omega} \to \mathscr{P}(Q)$. Řekneme, že zobrazení f je *antimonotonní*, jestliže

$$(\forall u, v \in [P]^{<\omega})(u \subseteq v \Rightarrow f(u) \supseteq f(v)).$$

Řekneme, že zobrazení g je *antiaditivní*, jestliže

$$(\forall u, v \in [P]^{<\omega})(g(u \cup v) = g(u) \cap g(v)).$$

Formuli $(\forall u \in [P]^{<\omega})(g(u) \subseteq f(u))$ budeme zkráceně zapisovat $g \leq f$.

(iv) Ultrafiltr Z se nazývá κ-dobrý, jestliže pro každý kardinál $\lambda < \kappa$ a každou antimonotonní funkci $f\colon [\lambda]^{<\omega} \to Z$ existuje antiaditivní funkce $g\colon [\lambda]^{<\omega} \to Z$ taková, že $g \leq f$.

Příklad 4.2.8. Každá antiaditivní funkce je zřejmě antimonotonní. Obrácená implikace však neplatí. Buď Z $\aleph_1$-neúplný ultrafiltr na I. Existuje posloupnost $\langle u_n \mid n \in \omega \rangle$ prvků Z taková, že $I = u_0 \supseteq u_1 \supseteq \ldots$, $\bigcap_{n\in\omega} u_n = \emptyset$. Položme $f(s) = u_{|s|}$, pro $s \in [\lambda]^{<\omega}$. Snadno se nyní nahlédne, že f je antimonotonní, avšak není antiaditivní.

Věta 4.2.9. *Buď I nekonečná množina. Pak na I existuje*

(i) $|I|$-regulární ultrafiltr;

(ii) $|I|^+$-dobrý $\aleph_1$-neúplný ultrafiltr.

Navíc, je-li F uniformní filtr na I (tj. takový, že pro každé $X \in F$ platí $|X| = |I|$), generovaný množinou mohutnosti nejvýše $|I|$, existuje $|I|^+$-dobrý ultrafiltr na I, rozšiřující F.

Zatímco dokázat část (i) věty je poměrně snadné, je důkaz druhé části značně technický. Důkaz věty 4.2.9 lze nalézt např. v knize [5].

Věta 4.2.10 (o kardinalitě regulární ultramocniny). *Nechť A je nekonečná množina a Z κ-regulární ultrafiltr na množině I kardinality κ. Pak $|A_Z| = |A|^\kappa$.*

Důkaz. Zřejmě platí $|A_Z| \leq \left|{}^I A\right| = |A|^\kappa$. Dle předpokladu existuje $X \subseteq Z$, $|X| = \kappa$ tak, že pro každé $Y \subseteq X$ nekonečné je $\bigcap Y = \emptyset$. Ukážeme, že $|A_Z| \geq \left|{}^X A\right|$. Buď $\langle X, \leq \rangle$ libovolné lineární uspořádání množiny X. Pro každé $i \in I$ označme $T(i)$ n-tici $\langle u_1, \ldots, u_n \rangle$ takovou, že $u_1, \ldots, u_n$ jsou právě všechny prvky množiny X obsahující i, přičemž $u_1 \leq \ldots \leq u_n$. Označme B množinu všech konečných posloupností prvků z A. Je-li $g \in {}^X A$, definujme $g' \in {}^I B$ tak, aby pro každé $i \in I$ bylo $g'(i) = \langle g(u_1), \ldots, g(u_n) \rangle$, kde $\langle u_1, \ldots, u_n \rangle = T(i)$. Zřejmě $|A| = |B|$, a tedy existuje nějaká bijekce $\beta :: B \to A$. Definujme zobrazení $F\colon {}^X A \to A_Z$ tak, že položíme $F(g) = \overline{\beta \circ g'}$ pro každé $g \in {}^X A$. Nyní stačí ukázat, že F je prosté. Nechť $f, g \in {}^X A, f \neq g$. Existuje $u \in X$ tak, že $f(u) \neq g(u)$. Speciálně $u \in Z$ a $u \neq \emptyset$. Je-li $i \in u$, existují $n, m \in \omega, 1 \leq m \leq n$ tak, že $T(i) = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$ a $u = u_m$. Pak ovšem $f'(i) = \langle f(u_1), \ldots, f(u_m), \ldots, f(u_n) \rangle \neq \langle g(u_1), \ldots, g(u_m), \ldots, g(u_n) \rangle = g'(i)$ pro každé $i \in u$, a tedy $\overline{\beta \circ f'} \neq \overline{\beta \circ g'}$. □

Lemma 4.2.11. *Nechť Z je $\aleph_1$-neúplný, κ-dobrý ultrafiltr na I. Nechť dále $|A| < \kappa$ a nechť $F\colon [A]^{<\omega} \to Z$ je antimonotonní zobrazení. Pak existuje zobrazení $S\colon I \to [A]^{<\omega}$ takové, že*

(i) $(\forall i \in I)(i \in F(S(i)))$

(ii) $(\forall a \in A)(\{\, i \in I \mid a \in S(i)\,\} \in Z)$

Důkaz. Protože Z je $\aleph_1$-neúplný, existují množiny $I = I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$ takové, že $I_n \in Z$ pro všechna $n \in \omega$ a $\bigcap_{n\in\omega} I_n = \emptyset$. Položme $f(s) = F(s) \cap I_{|s|}$ pro každé $s \in [A]^{<\omega}$. Zobrazení $f\colon [A]^{<\omega} \to Z$ je zřejmě antimonotonní, a tedy existuje $g\colon [A]^{<\omega} \to Z$ antiaditivní tak, že $g \leq f$. Je-li $i \in I$, položme $S(i) = \{\, a \in A \mid i \in g(\{a\}) \,\}$. Pak $g(\{a\}) = \{\, i \in I \mid a \in S(i) \,\} \in Z$ pro každé $a \in A$, a tedy (ii) platí. Nechť $i \in I$. Je-li $t = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq S(i)$, potom $i \in \bigcap_{i=1}^{n} g(\{a_n\}) = g(t) \subseteq f(t) = I_{|t|} \cap F(t)$. Kdyby množina $S(i)$ byla nekonečná, bylo by $i \in I_n$ pro každé $n \in \omega$, což není možné. Pro $t = S(i)$ tak speciálně dostáváme $i \in F(S(i))$, jak požaduje (i). □

Důsledek 4.2.12. *Každý $\aleph_1$-neúplný, κ^+-dobrý ultrafiltr je κ-regulární.*

Důkaz. Nechť Z je $\aleph_1$-neúplný, κ^+-dobrý ultrafiltr na množině I, A množina mohutnosti κ a $F\colon [A]^{<\omega} \to Z$ libovolné antimonotonní zobrazení. Nechť S je zobrazení splňující podmínky (i), (ii) z předchozího lemmatu. Položme $X = \{\, X_a \mid a \in A \,\}$, kde $X_a = \{\, i \in I \mid a \in S(i) \,\}$. Zřejmě $|X| = \kappa$ a podle (ii) je $X_a \in Z$ pro každé $a \in A$. Je-li $Y \subseteq X$ nekonečná množina, je $\bigcap Y = \emptyset$. V opačném případě totiž existuje $i \in \bigcap Y$, a množina $S(i) \supseteq \{\, a \in A \mid X_a \in Y \,\}$ je tudíž nekonečná — spor! □

Definice 4.2.13. Nechť κ je nespočetný kardinál. Řekneme, že $\in$-struktura $\mathfrak{A}$ je *κ-saturovaná,* jestliže pro každou množinu $X \subseteq A$, $|X| < \kappa$, platí

$$\big(\forall s \in [X]^{<\omega}\big)\Big(\bigcap_{a\in s} a_{\mathfrak{A}} \neq \emptyset\Big) \Rightarrow \bigcap_{a\in X} a_{\mathfrak{A}} \neq \emptyset.$$

Poznámka 4.2.14. Vidíme, že třída W je κ-saturovaná ve smyslu definice 4.1.5 právě tehdy, když $\in$-struktura $\langle W, \in_W\rangle$ κ-saturovaná.

Věta 4.2.15. *Nechť Z je κ-dobrý $\aleph_1$-neúplný ultrafiltr na množině I a $\langle \mathfrak{A}_i \mid i \in I\rangle$ soubor $\in$-struktur. Pak $\prod_{I/Z} \mathfrak{A}_i$ je κ-saturovaná $\in$-struktura.*

Důkaz. Označme $\mathfrak{B} = \prod_{I/Z} \mathfrak{A}_i$. Nechť $X \subseteq B$, $|X| < \kappa$ a nechť platí

$$\big(\forall s \in [X]^{<\omega}\big)\Big(\bigcap_{f\in s} f_{\mathfrak{B}} \neq \emptyset\Big).$$

Buď $s \in [X]^{<\omega}$. Položme $F(s) = \{\, i \in I \mid \bigcap_{f\in s} f(i)_{\mathfrak{A}_i} \neq \emptyset \,\}$. Existuje $g \in B$ tak, že $g \in_Z f$ pro každé $f \in s$, a tedy

$$F(s) \supseteq \{\, i \in I \mid g(i) \in \bigcap_{f\in s} \big(f(i)\big)_{\mathfrak{A}_i} \,\} = \bigcap_{f\in s} \{\, i \in I \mid g(i) \in^{A_i} f(i) \,\} \in Z$$

Pro každé $s \in [X]^{<\omega}$ je tudíž $F(s) \in Z$. Zobrazení $F\colon [X]^{<\omega} \to Z$ je navíc zřejmě antimonotonní, a tudíž podle 4.2.11 existuje $S\colon I \to [X]^{<\omega}$ tak, že platí

(i) $(\forall i \in I)(i \in F(S(i)))$,

(ii) $(\forall f \in X)(\{\, i \in I \mid f \in S(i) \,\} \in Z)$.

Díky (i) můžeme pro každé $i \in I$ vybrat hodnotu $h(i) \in A_i$ tak, že $h(i) \in^{A_i} f(i)$ pro všechna $f \in S(i)$. Z (ii) pak pro $f \in X$ ihned dostáváme

$$\{\, i \in I \mid h(i) \in^{A_i} f(i) \,\} \supseteq \{\, i \in I \mid f \in S(i) \,\} \in Z,$$

čili $\bar{h} \in_Z \bar{f}$ $(= f)$. □

4.3 Existence reflexí

Tvrzení 4.3.1. *Buď W tranzitivní třída a H elementární vnoření $\in$-struktury $\langle \mathbf{V}, \in_{\mathbf{V}} \rangle$ do $\langle W, \in_W \rangle$. Jestliže $W = \bigcup \mathrm{Rng}(H)$, pak W je skorouniversální.*

Důkaz. Označme $U = \mathrm{Rng}(H)$. Zřejmě U je skorouniversální, neboť, je-li $u \subseteq U$, platí $u \subseteq H(H^{-1}[u]) \in U$. Nechť $u \subseteq W$. Nalezneme dokonce množinu $s \in U$ tak, že $u \subseteq s$. Pro každé $x \in u$ označme $y(x)$ množinu $y \in U$ takovou, že $x \in y$ a $\mathbf{C}(y)$ je nejmenší možné. Z předpokladu $W = \bigcup U$ plyne, že $y(x)$ existuje pro každé $x \in u$. Platí $\{\, y(x) \mid x \in u \,\} \subseteq U$, a existuje tedy $t \in U$ tak, že $\{\, y(x) \mid x \in u \,\} \subseteq t$. Zřejmě $u \subseteq \bigcup t$. Buď $s \in U$ takové, že $[s = \bigcup t]^U$. Z elementarity H a tranzitivity W vyplývá, že $s = \bigcup t$, a tedy $u \subseteq s$. □

Věta 4.3.2 (o reflexi). *Pro každý nekonečný kardinál κ existuje jednoduchá κ^+-reflexe.*

Důkaz. Buď I libovolná množina mohutnosti κ. Podle 4.2.9 existuje κ^+-dobrý $\aleph_1$-neúplný ultrafiltr Z na I. Nechť $\langle \mathbf{V}_Z, \in_Z \rangle$ je ultramocnina universa množin $\langle \mathbf{V}, \in_{\mathbf{V}} \rangle$. Podle 4.2.4 je $\in$-struktura $\langle \mathbf{V}_Z, \in_Z \rangle$ extenzionální a z 2.6.2 tedy plyne, že existuje tranzitivní třída W a izomorfismus F $\in$-struktur $\langle \mathbf{V}_Z, \in_Z \rangle$ a $\langle W, \in_W \rangle$. Označme H zobrazení $F \circ K \colon \mathbf{V} \to W$, kde K je kanonické vnoření $\langle \mathbf{V}, \in_{\mathbf{V}} \rangle$ do $\langle \mathbf{V}_Z, \in_Z \rangle$. Ukážeme, že $\langle H, W \rangle$ je jednoduchá κ^+-reflexe.

Podle 4.2.6 je K elementární vnoření $\in$-struktury $\langle \mathbf{V}, \in_{\mathbf{V}} \rangle$ do $\langle \mathbf{V}_Z, \in_Z \rangle$, a tedy $H = F \circ K$ je elementární vnoření $\langle \mathbf{V}, \in_{\mathbf{V}} \rangle$ do $\langle W, \in_W \rangle$. Z věty 4.2.15 a toho, že F je izomorfismus, je patrné, že třída W je κ^+-saturovaná.

Nyní stačí dokázat jednoduchost; z ní podle 4.1.11 a předešlého tvrzení dostaneme, že W je skorouniversální, což již znamená, že $\langle W, H \rangle$ je κ^+-reflexe. Označme tedy $U = \mathrm{Rng}(H)$ a položme $J = H(I)$, $D = F(\overline{\mathbf{Id} \restriction I})$. Zřejmě $D \in J \in U$, neboť $\overline{\mathbf{Id} \restriction I} \in_Z K(I)$. Ověříme rovnost $W = U[J, D]$. Buď $y \in W$. Existuje zobrazení $f \in {}^I\mathbf{V}$ takové, že $F(\bar{f}) = y$. Snadno se nahlédne, že platí

$$\bigl[K(f) \text{ je zobrazení } \& \ \mathrm{Dom}(K(f)) = K(I) \ \& \ (K(f))(\overline{\mathbf{Id} \restriction I}) = \bar{f}\,\bigr]_Z .$$

Je tedy zřejmé, že platí $[H(f) \text{ je zobrazení } \& \ \mathrm{Dom}(H(f)) = J]^U$ a $(H(f))(D) = y$. □

Poznámka 4.3.3. Předpokládejme, že $\langle H, W \rangle$ je nějaká κ-reflexe. Je-li $X \subseteq \mathbf{Ur}$ libovolná třída urelementů a $\mathbf{Ur} - X$ je vlastní třída, je rovněž $\mathbf{Ur} - H[X]$ vlastní třída a podle 3.1.19 tudíž zřejmě existuje automorfismus F universa množin, takový, že zobrazení $H' = F \circ H$ je identické na X. Snadno se pak nahlédne, že $\langle H', F[W] \rangle$ je κ-reflexe a byla-li $\langle H, W \rangle$ jednoduchá, je jednoduchá i $\langle H', F[W] \rangle$. Právě provedená úvaha spolu s větou o reflexi zaručuje v $\mathbf{UT}$ existenci (jednoduchých) κ-reflexí, které jsou navíc identické na nějaké předem zvolené třídě urelementů X takové, že $\mathbf{Ur} - X$ je stále ještě vlastní třída. Poznamenejme, že tento poznatek může občas usnadnit některé nestandardní obraty — např. ztotožněním reálných čísel s prvky nějaké množiny urelementů zaručíme, že standardní reálná čísla jsou při vhodné reflexi reálnými čísly i ve smyslu externálním, apod. Tuto problematiku zde zmiňujeme jen na okraj a dále se jí nebudeme zabývat (podrobnější diskuzi viz v [3]).

4.4 Věty o kardinálním kolapsu

Věta 4.4.1 (o kardinálním kolapsu). *Buď κ nekonečný kardinál. Pak existuje κ^+-reflexe $\langle H, W \rangle$ taková, že následující podmínka platí pro každé $X \in W$:*

$$\bigl[H(\omega) \le |X| \le 2^{H(\kappa)}\bigr]^W \Rightarrow |X| = 2^\kappa \tag{4.2}$$

a speciálně $|H(\omega)| = |H(2^\kappa)| = 2^\kappa$.

Důkaz. Nechť I je množina mohutnosti κ a Z nějaký $\aleph_1$-neúplný κ^+-dobrý ultrafiltr na I. Buď $\langle \mathbf{V}_Z, \in_Z \rangle$ ultramocnina universa množin $\langle \mathbf{V}, \in_\mathbf{V} \rangle$, W tranzitivní třída a F izomorfismus $\in$-struktur $\langle \mathbf{V}_Z, \in_Z \rangle$ a $\langle W, \in_W \rangle$, podobně jako v důkazu věty o reflexi. Položme $H = F \circ K$, kde K je kanonické vnoření $\langle \mathbf{V}, \in_\mathbf{V} \rangle$ do $\langle \mathbf{V}_Z, \in_Z \rangle$. Pak $\langle H, W \rangle$ je κ^+-reflexe. Nejprve ukážeme, že podmínka (4.2) platí pro každé $X \in \mathrm{Rng}(H)$. Nechť $X = H(Y)$, kde Y je libovolná množina taková, že $[H(\omega) \le |X| \le 2^{H(\kappa)}]^W$. Pak $\omega \le |Y| \le 2^\kappa$ a

$$|X| = \left|F^{-1}[X]\right| = |\{\, f \in \mathbf{V}_Z \mid f \in_Z K(Y) \,\}| = |Y_Z|\,.$$

Z 4.2.12 vyplývá, že ultrafiltr Z je κ-regulární, a podle 4.2.10 tudíž platí $|Y_Z| = |Y|^\kappa = 2^\kappa$. Speciálně dostáváme $|H(\omega)| = |H(2^\kappa)| = 2^\kappa$. Je-li $X \in W$ a $[H(\omega) \le |X| \le 2^{H(\kappa)}]^W$, je $2^\kappa = |H(\omega)| \le |X| \le |H(2^\kappa)| = 2^\kappa$. □

Definice 4.4.2. Řekneme, že reflexe $\langle H, W \rangle$ je κ-kolapsující, jestliže platí $|H(\kappa)| = \kappa$.

Důsledek 4.4.3. *Je-li κ nekonečný kardinál, pro který platí hypotéza kontinua (tj. $2^\kappa = \kappa^+$), existuje κ^+-kolapsující κ^+-reflexe.*

Tvrzení 4.4.4. *Buď $\langle H, W \rangle$ κ-reflexe a $X \in W$. Je-li X nekonečná, je $|X| \ge \kappa$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $X \in W$ je nekonečná množina a $|X| < \kappa$. Vyvodíme spor. Označme $Y = \{X - \{x\} \mid x \in X\}$. Zřejmě $Y \subseteq W$, $|Y| < \kappa$ a protože X je nekonečná, je Y centrovaná. Ze saturovanosti W plyne, že existuje $y \in \bigcap Y$. Pak ale $y \in X$, a tedy $X - \{y\} \in Y$ — spor! □

Důsledek 4.4.5. *Buď κ nekonečný kardinál a $\langle H, W \rangle$ κ-kolapsující κ-reflexe. Nechť $X \in W$, X nekonečná a $(|X| \le H(\kappa))^W$. Pak $|X| = \kappa$.*

Důkaz. Podle 4.4.4 je $|X| \ge \kappa$. Protože $\langle H, W \rangle$ je κ-kolapsující, je $H(\kappa) = \kappa$, a tedy $|X| \le |H(\kappa)| = \kappa$. □

4.5 Jednoduché reflexe

Na základě důkazu věty o reflexi lze snadno učinit následující pozorování:

Pozorování 4.5.1. *Buď Z ultrafiltr na množině I, W tranzitivní třída a F izomorfismus $\in$-struktur $\langle V_Z, \in_Z \rangle$ a $\langle W, \in_W \rangle$. Označme $H = F \circ K$, kde K je kanonické vnoření $\langle \mathbf{V}, \in_\mathbf{V} \rangle$ do $\langle V_Z, \in_Z \rangle$. Pak $\langle H, W \rangle$ je jednoduchá reflexe.*

Platí i obrácená implikace. Reflexe $\langle H, W \rangle$ je jednoduchá právě tehdy, když ji lze získat popsanou metodou z ultramocniny universa množin:

Věta 4.5.2. *Nechť $\langle H, W \rangle$ je jednoduchá reflexe, $U = \mathrm{Rng}(H)$, $D \in J \in U$, $W = U[J, D]$. Označme I tu množinu, pro kterou $H(I) = J$. Pak $Z = \{\, u \subseteq I \mid D \in H(u) \,\}$ je ultrafiltr na I a zobrazení $F\colon \mathbf{V}_Z \to W$ takové, že $F(g) = (H(g))(D)$ pro každé $g \in \mathbf{V}_Z$, je izomorfismus ultramocniny $\langle \mathbf{V}_Z, \in_Z \rangle$ a $\langle W, \in_W \rangle$; je-li K kanonické vnoření $\in$-struktury $\langle \mathbf{V}, \in_\mathbf{V} \rangle$ do $\langle \mathbf{V}_Z, \in_Z \rangle$, je $H = F \circ K$.*

Důkaz. Ověřit, že Z je ultrafiltr je snadné. Všimněme si, že z definice ultrafiltru Z vyplývá pro libovolná zobrazení $f, g \in {}^I\mathbf{V}$

$$f =_Z g \Leftrightarrow \{\, i \in I \mid f(i) = g(i) \,\} \in Z \Leftrightarrow (H(f))(D) = (H(g))(D) \tag{4.3}$$

Zobrazení F je *na*, neboť pro každé $y \in W$ existuje díky jednoduchosti $g \in {}^I\mathbf{V}$ tak, že $(H(g))(D) = y$, odkud podle definice F a (4.3) plyne $F(\bar{g}) = y$.

F je *prosté*, neboť kdykoli f, g jsou dva různé prvky třídy $\mathbf{V}_Z$, je podle (4.3) $(H(f))(D) \neq \neq (H(g))(D)$, čili $F(f) \neq F(g)$.

Nechť $f, g \in \mathbf{V}_Z$. Označíme-li $u = \{\, i \in I \mid f(i) \in g(i) \,\}$, platí analogicky:

$$f \in_Z g \Leftrightarrow u \in Z \Leftrightarrow D \in H(u) \Leftrightarrow (H(f))(D) \in (H(g))(D) \Leftrightarrow F(f) \in F(g).$$

F je tedy izomorfismus $\in$-struktur $\langle \mathbf{V}_Z, \in_Z \rangle$ a $\langle W, \in_W \rangle$.

Buď x množina. Pak $F(K(x)) = (H(K(x)))(D) = (H(I \times \{x\}))(D) = H(x)$. □

Ve zbytku tohoto odstavce ukážeme, že pomocí ultraproduktu můžeme z daného souboru reflexí konstruovat nové reflexe. Současně uvidíme, že taková konstrukce zachovává jednoduchost. Vyjdeme-li tedy z jednoduchých reflexí, získáme jejich ultraproduktem opět jednoduchou reflexi. Speciálním případem této konstrukce, jak ukážeme, je „skládání" reflexí. Na závěr pak uvedeme příklad κ-reflexe, která není jednoduchá.

Lemma 4.5.3. *Buď I libovolná množina, Z ultrafiltr na I. Buď dále pro každé $i \in I$ dána dvojice $\langle J_i, Z_i \rangle$, kde Z_i je ultrafiltr na J_i. Označme $\mathcal{J}$ disjunktní sjednocení souboru $\langle J_i \mid i \in I \rangle$ a $\nu_i \colon J_i \to \mathcal{J}$ i-té vnoření, tj.*

$$\mathcal{J} = \bigcup_{i \in I} \{i\} \times J_i, \quad \nu_i(j) = \langle i, j \rangle \quad (i \in I,\, j \in J_i).$$

Množina $\mathcal{Z} \subseteq \mathscr{P}(\mathcal{J})$ taková, že pro všechna $u \subseteq \mathcal{J}$ platí

$$u \in \mathcal{Z} \Leftrightarrow \{\, i \in I \mid \nu_i^{-1}[u] \in Z_i \,\} \in Z,$$

je ultrafiltr na množině $\mathcal{J}$.

Důkaz. Zřejmě $\emptyset \notin \mathcal{Z}$. Je-li $u \in \mathcal{Z}$, $u \subseteq v \in \mathscr{P}(\mathcal{J})$, pak pro každé $i \in I$ platí $\nu_i^{-1}[u] \subseteq \nu_i^{-1}[v]$, a tedy $v \in \mathcal{Z}$. Nechť $u, v \in \mathcal{Z}$. Pak i $u \cap v \in \mathcal{Z}$, neboť

$$\{\, i \mid \nu_i^{-1}[u \cap v] \in Z_i \,\} = \{\, i \mid \nu_i^{-1}[u] \in Z_i \,\} \cap \{\, i \mid \nu_i^{-1}[v] \in Z_i \,\} \in Z.$$

Nechť konečně $u \notin \mathcal{Z}$. Potom

$$\begin{aligned} I - \{\, i \mid \nu_i^{-1}[u] \in Z_i \,\} &= \{\, i \mid \nu_i^{-1}[u] \notin Z_i \,\} = \\ &= \{\, i \mid J_i - \nu_i^{-1}[u] \in Z_i \,\} = \{\, i \mid \nu_i^{-1}[\mathcal{J} - u] \in Z_i \,\} \in Z, \end{aligned}$$

tudíž $\mathcal{J} - u \in \mathcal{Z}$. □

Definice 4.5.4. Ultrafiltr $\mathcal{Z}$ popsaný v předešlém lemmatu nazýváme *součinem souboru ultrafiltrů $\langle Z_i \mid i \in I \rangle$ podle Z.*

Lemma 4.5.5. *Nechť Z je ultrafiltr na množině I. Pak platí:*

(i) Jestliže $\langle \mathfrak{A}_i \mid i \in I \rangle$ a $\langle \mathfrak{B}_i \mid i \in I \rangle$ jsou soubory $\in$-struktur takové, že $\mathfrak{A}_i \cong \mathfrak{B}_i$ pro každé $i \in I$, pak $\prod_{I/Z} \mathfrak{A}_i \cong \prod_{I/Z} \mathfrak{B}_i$.

(ii) Nechť je pro každé $i \in I$ dána množina J_i, ultrafiltr Z_i na J_i a soubor $\in$-struktur $\langle \mathfrak{A}_{i,j} \mid j \in J_i \rangle$. Označme $\mathcal{J}$ disjunktní sjednocení souboru $\langle J_i \mid i \in I \rangle$ a $\mathcal{Z}$ součin souboru ultrafiltrů $\langle Z_i \mid i \in I \rangle$ podle Z. Pak platí

$$\prod_{I/Z} \Big(\prod_{J_i/Z_i} \mathfrak{A}_{i,j} \Big) \cong \prod_{\mathcal{J}/\mathcal{Z}} \mathfrak{A}_{i,j}.$$

Důkaz. Ad (i). Nechť F_i označuje izomorfismus $\mathfrak{A}_i$ a $\mathfrak{B}_i$ $(i \in I)$. Pro každé $i \in I$ a každé $f \in \prod_{I/Z} A_i$ položme $F(f) = \bar{g}$, kde $g(i) = F_i(f(i))$. Zobrazení $F\colon \prod_{I/Z} A_i \to \prod_{I/Z} B_i$ je, jak se snadno nahlédne, hledaným izomorfismem.

Ad (ii). Definujme zobrazení $F\colon \prod_{\mathcal{J}/\mathcal{Z}} A_{i,j} \to \prod_{I/Z} \big(\prod_{J_i/Z_i} A_{i,j} \big)$ tak, že pro $f \in \prod_{\mathcal{J}/\mathcal{Z}} A_{i,j}$ položíme $F(f) = \bar{g}$, kde $g(i) = f \circ \nu_i$. Není těžké ověřit, že F je hledaný izomorfismus. □

Věta 4.5.6. *Nechť Z je ultrafiltr na množině I a nechť $\langle \langle H_i, W_i \rangle \mid i \in I \rangle$ je soubor reflexí. Buď $L\colon \mathbf{V} \to \prod_{I/Z} W_i$ zobrazení takové, že $L(x) = \bar{f}_x$, kde $f_x(i) = H_i(x)$ $(i \in I, x \in \mathbf{V})$. Buď dále W tranzitivní třída a F izomorfismus $\in$-struktur $\prod_{I/Z}\langle W_i, \in_{W_i} \rangle$ a $\langle W, \in_W \rangle$. Položme $H = F \circ L$. Potom je $\langle H, W \rangle$ reflexe a je-li pro všechna $i \in I$ reflexe $\langle H_i, W_i \rangle$ jednoduchá, je i $\langle H, W \rangle$ jednoduchá.*

Důkaz. Dokázat, že třída W je skorouniversální je celkem snadné. K ověření, že $\langle H, W \rangle$ je reflexe tedy stačí ukázat, že L je elementární vnoření $\in$-struktury $\langle \mathbf{V}, \in_\mathbf{V} \rangle$ do $\prod_{I/Z}\langle W_i, \in_{W_i} \rangle$. Nechť φ je formule v jazyce $<\in>$ se všemi volnými proměnnými mezi $x_1, \ldots, x_n$ a nechť $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{V}$. Pak platí

$$\begin{aligned} \varphi(a_1, \ldots, a_n) &\Leftrightarrow \big(\text{pro každé } i \in I \text{ platí } \varphi^{W_i}(H_i(a_1), \ldots, H_i(a_n))\big) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \varphi_Z(L(a_1), \ldots L(a_n)). \end{aligned}$$

Nechť jsou navíc všechny $\langle H_i, W_i \rangle$ jednoduché. Pak podle 4.5.2 pro každé $i \in I$ existuje množina J_i, ultrafiltr Z_i na J_i a izomorfismus F_i $\in$-struktur $\langle \mathbf{V}_{Z_i}, \in_{Z_i} \rangle$ a $\langle W_i, \in_{W_i} \rangle$ tak, že $H_i = F_i \circ K_i$, kde K_i je kanonické vnoření $\langle \mathbf{V}, \in_\mathbf{V} \rangle$ do ultramocniny $\langle \mathbf{V}_{Z_i}, \in_{Z_i} \rangle$. Označíme-li $\mathcal{J}$ disjunktní sjednocení souboru $\langle J_i \mid i \in I \rangle$ a $\mathcal{Z}$ ultrafiltr na $\mathcal{J}$, který je součinem souboru $\langle Z_i \mid i \in I \rangle$ podle Z, pak na základě předešlého lemmatu dostáváme:

$$\langle \mathbf{V}_\mathcal{Z}, \in_\mathcal{Z} \rangle \cong \prod_{I/Z} \langle \mathbf{V}_{Z_i}, \in_{Z_i} \rangle \cong \prod_{I/Z} \langle W_i, \in_{W_i} \rangle \cong \langle W, \in_W \rangle.$$

Snadno se navíc nahlédne, že takto získaný izomorfismus G $\in$-struktur $\langle \mathbf{V}_\mathcal{Z}, \in_\mathcal{Z} \rangle$ a $\langle W, \in_W \rangle$ splňuje rovnost $H = G \circ K$, kde K je kanonické vnoření $\langle \mathbf{V}, \in_V \rangle$ do $\langle \mathbf{V}_\mathcal{Z}, \in_\mathcal{Z} \rangle$. Reflexe $\langle H, W \rangle$ je tedy podle 4.5.1 jednoduchá. □

Věta 4.5.7. *Nechť $\langle H_1, W_1 \rangle$, $\langle H_2, W_2 \rangle$ jsou jednoduché reflexe. Označme $H = H_2 \circ H_1$ a $W = \bigcup (H_2[W_1])$. Pak $\langle H, W \rangle$ je opět jednoduchá reflexe.*

Důkaz. Pro $i = 1, 2$ buď J_i množina, Z_i ultrafiltr na J_i a F_i izomorfismus $\in$-struktur $\langle \mathbf{V}_{Z_i}, \in_{Z_i} \rangle$ a $\langle W_i, Z_i \rangle$ takový, že $H_i = F \circ K_i$, kde K_i je kanonické vnoření $\langle V, \in_\mathbf{V} \rangle$ do $\langle \mathbf{V}_{Z_i}, \in_{Z_i} \rangle$. Nechť $\pi\colon {}^{J_2}\mathbf{V} \to \mathbf{V}_{Z_2}$ označuje kvocientové zobrazení třídy ${}^{J_2}\mathbf{V}$ podle relace $=_{Z_2}$. Protože $(W_1)_{Z_2} \subseteq$ $\subseteq {}^{J_2}W_1 \subseteq {}^{J_2}\mathbf{V}$, je zobrazení $G = \pi \restriction (W_1)_{Z_2}$ zřejmě izomorfismus $\in$-struktur $\langle W_1, \in_{W_1} \rangle_{Z_2}$

a $\langle \mathbf{V}_{Z_2}, \in_{Z_2} \rangle|_{\pi[^{J_2}W_1]}$. K důkazu věty nyní postačí, nalezneme-li izomorfismus F $\in$-struktur $\langle W_1, \in_{W_1} \rangle_{Z_2}$ a $\langle W, \in_W \rangle$ takový, že $H = F \circ L$, kde $L = G^{-1} \circ K_2 \circ H_1$ odpovídá zobrazení L z předchozí věty:

Buď $f \in (W_1)_{Z_2}$. Položme $F(f) = F_2(G(f))$. Vzhledem k tomu, že F_2 i G jsou izomorfismy $\in$-struktur, stačí dokázat, že $\mathrm{Rng}(F) = W$. Nechť $a \in W$. Existuje prvek $b \in H_2[W_1] \subseteq W_2$ takový, že $a \in b$. W_2 je tranzitivní, a tedy $a \in W_2$. Označme f, g prvky $^{J_2}\mathbf{V}$ takové, že $a = F_2(\pi(f))$ a $b = F_2(\pi(g))$, přičemž $\mathrm{Rng}(g) \subseteq W_1$. Jelikož F_2 je izomorfismus, platí $f \in_{Z_2} g$, a lze tedy předpokládat, že $\mathrm{Rng}(f) \subseteq W_1$, neboť třída W_1 je tranzitivní. Pak ovšem $F(G^{-1}(\pi(f))) = a$, a tedy $a \in \mathrm{Rng}(F)$. Buď naopak $f \in (W_1)_{Z_2}$. Podle 4.1.11 a 4.3.1 je třída W_1 skorouniversální, a tedy existuje $s \in W_1$ tak, že $\mathrm{Rng}(f) \subseteq s$. Pak $\pi(f) \in_{Z_2} K_2(s)$, odkud $F(f) = F_2(G(f)) \in H_2(s) \in H_2[W_1]$, tudíž $F(f) \in W$. □

V následujícím tvrzení užíváme označení z definice 3.3.1.

Tvrzení 4.5.8. *Buď $u \subseteq \mathbf{Ur}$, $u \neq \emptyset$. Pak platí:*

(i) $\langle \mathbf{V} \triangle u, \in_{\mathbf{V} \triangle u} \rangle$ je elementární podstruktura v $\langle \mathbf{V}, \in_{\mathbf{V}} \rangle$.[4]

(ii) Buď F izomorfismus $\langle \mathbf{V}, \in_{\mathbf{V}} \rangle$ a $\langle \mathbf{V} \triangle u, \in_{\mathbf{V} \triangle u} \rangle$. Pak

(a) $\langle F, \mathbf{V} \rangle$ je reflexe, která není jednoduchá.

(b) Je-li $\langle H, W \rangle$ nějaká κ-reflexe, je $\langle H \circ F, W \rangle$ κ-reflexe, která není jednoduchá.

Důkaz. Nejprve dokážeme $\langle \mathbf{V} \triangle u, \in_{\mathbf{V} \triangle u} \rangle \preccurlyeq \langle \mathbf{V}, \in_{\mathbf{V}} \rangle$. Buď φ formule jazyka $<\in>$ se všemi volnými proměnnými mezi $x_1, \dots, x_n$ a $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{V} \triangle u$. Položme $t = \mathrm{TC}(\{a_1, \dots, a_n\})$. Buď F izomorfismus $\in$-struktur $\langle \mathbf{V}, \in_{\mathbf{V}} \rangle$ a $\langle \mathbf{V} \triangle u, \in_{\mathbf{V} \triangle u} \rangle$. Zobrazení $f = F \restriction F^{-1}[t]$ je podobnost, a tedy existuje automorfismus universa množin G takový, že $f \subseteq G$. Nyní zřejmě platí:

$$\begin{aligned} &\varphi^{\mathbf{V} \triangle u}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \varphi(F^{-1}(a_1), \dots, F^{-1}(a_n)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \varphi(G(F^{-1}(a_1)), \dots, G(F^{-1}(a_n))) \Leftrightarrow \varphi(a_1, \dots, a_n). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Nyní se věnujme tvrzení (ii). Podle (i) je zobrazení F zároveň elementární vnoření a protože $\mathbf{V} \triangle u$ je kotranzitivní, je $\langle F, \mathbf{V} \rangle$ reflexe. Navíc, protože $\mathbf{V} \neq \bigcup \mathrm{Rng}(F) = \mathbf{V} \triangle u$, nemůže být $\langle F, \mathbf{V} \rangle$ jednoduchá. Buď $\langle H, W \rangle$ nějaká κ-reflexe. Snadno se nahlédne, že $H \circ F$ je elementární vnoření do W. Protože třída $\mathbf{W}$ je κ-saturovaná a $\mathbf{W} \neq \bigcup \mathrm{Rng}(H \circ F)$, je $\langle H \circ F, W \rangle$ κ-reflexe, která není jednoduchá. □

4.6 Množiny invariantní vůči reflexím, orbity nestandardních přirozených čísel

V kapitole o automorfismech jsme ukázali, že $\mathbf{WF}$ je třída právě těch množin, které jsou invariantní vůči všem automorfismům. Nyní ukážeme, že oborem množin invariantních vůči reflexím je množina p_ω.

Tvrzení 4.6.1. *Buď $\langle H, W \rangle$ reflexe.*

(i) Zobrazení H je identické na p_ω.

(ii) Je-li W $\aleph_1$-saturovaná, je $W \cap \mathbf{WF} = p_\omega$.

[4] viz též 3.3.2

(iii) p_ω je množinou těch prvků, které jsou invariantní vůči reflexím.

Důkaz. Tvrzení (i) plyne z 4.1.7. Buď W $\aleph_1$-saturovaná a $x \in W - p_\omega$. Ukážeme, že $x \notin \mathbf{WF}$. Pro každé $n \in \omega$ definujme internálně (tj. ve $\langle W, \in_W \rangle$)

$$P_n^x = \{ f \in W \mid f \text{ je zobrazení } \& \ n \in \mathrm{Dom}(f) \in H(\omega) \ \& \\ \& \ \mathrm{Rng}(f) \subseteq \mathrm{TC}(\{x\}) \ \& \ (\forall \nu \in \mathrm{Dom}(f))(\nu > 0 \Rightarrow f(\nu) \in f(\nu - 1)) \}.$$

Protože $x \notin p_\omega$, je $P_n^x \supseteq P_{n+1}^x \neq \emptyset$ pro každé $n \in \omega$. Označme $X = \{ P_n^x \mid n \in \omega \}$. Pak $X \subseteq W$, $|X| < \aleph_1$, X je centrovaný systém, tedy existuje $f \in \bigcap X$. Speciálně $\omega \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ a $x = f(0) \ni f(1) \ni f(2) \ni \ldots$, čili $x \notin \mathbf{WF}$. Tvrzení (iii) je snadným důsledkem předešlých dvou, uvědomíme-li si, že nalézt reflexi, která „pohne" danou množinou $x \notin \mathbf{WF}$, je s pomocí automorfismů snadné. $\square$

Protože tvrzení (i) platí dokonce pro libovolné elementární vnoření, je p_ω dokonce oborem množin, které jsou invariantní vůči všem elementárním vnořením.

Nyní se budeme věnovat otázce struktury orbitální ekvivalence na nestandardních přirozených číslech. Nechť κ je nespočetný kardinál a $\langle H, W \rangle$ κ-reflexe. Uvažujme nestandardní přirozené číslo $\nu \in H(\omega) - \omega$. Relace $\in_\nu$ je lineárním uspořádáním na množině ν, které díky κ-saturovanosti třídy W není dobré (viz předešlé tvrzení). Můžeme se ptát, jaké externální vlastnosti toto uspořádání má. Snadno se například nahlédne, že uspořádání (tedy $\in$-struktury) $\langle \nu, \in_\nu \rangle$ a $\langle \nu + 1, \in_{\nu+1} \rangle$[5] jsou izomorfní (tj. v řeči podobností $\nu \circledast \nu + 1$). Platí však víc:

Tvrzení 4.6.2. *Buď κ nespočetný kardinál, $\langle H, W \rangle$ κ-reflexe. Pak pro každé $\nu \in H(\omega)$ platí:*

(i) $[\nu]_\circledast \supseteq \{ \mu \in H(\omega) - \omega \mid |\mu| = |\nu| \}$;

(ii) je-li navíc $\langle H, W \rangle$ κ-kolapsující, je $[\nu]_\circledast \supseteq H(\omega) - \omega$.

Část (ii) plyne ihned z tvrzení (i) a 4.4.5. Důkaz (i) se opírá o následující tvrzení technického rázu:

Tvrzení 4.6.3. *Označme $\mathcal{L} = \langle \leq, \mathbf{0}, \mathbf{I}, \mathbf{S}, \mathbf{P} \rangle$ jazyk s jednou binární relací $\leq$, dvěma konstantami $\mathbf{0}, \mathbf{I}$ a dvěma unárními funkčními symboly $\mathbf{S}, \mathbf{P}$. Pro každé $\nu \in H(\omega) - \omega$ definujme internálně prezentovaný model $\mathfrak{M}_\nu = \langle \nu, \leq^\nu, \mathbf{0}^\nu, \mathbf{I}^\nu, \mathbf{S}^\nu, \mathbf{P}^\nu \rangle$ jazyka $\mathcal{L}$ tak, aby platilo (internálně): $\leq^\nu = \in_\nu$, $\mathbf{0}^\nu = 0$, $\mathbf{I}^\nu = \nu - 1$ a pro každé $\mu \in \nu$*

$$\mathbf{S}(\mu) = \begin{cases} \mu + 1, & \textit{pokud } \mu + 1 \in \nu \\ \mathbf{I}^\nu & \textit{jinak}, \end{cases}$$

$$\mathbf{P}(\mu) = \begin{cases} \mu - 1, & \textit{pokud } \mu > 0 \\ \mathbf{0} & \textit{jinak}. \end{cases}$$

Pro každé $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \nu$ ($n \in \omega$) navíc položme

$$\Delta^{\mathfrak{M}_\nu}(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \{ \phi \in \mathcal{F}_n(\mathcal{L}) \mid \phi \textit{ je atomická } \& \ \mathfrak{M}_\nu \models \phi[a_0, \ldots, a_{n-1}] \}.$$

Pak pro $\langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle, \langle b_0, \ldots, b_{n-1} \rangle \in \nu^n$ je $\Delta^{\mathfrak{M}_\nu}(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \Delta^{\mathfrak{M}_\nu}(b_0, \ldots, b_{n-1})$ právě tehdy, když pro každou formuli $\phi \in \mathcal{F}_n(\mathcal{L})$ platí

$$\mathfrak{M}_\nu \models (\phi[a_0, \ldots, a_{n-1}] \Leftrightarrow \phi[b_0, \ldots, b_{n-1}]).$$

[5] Píšeme-li $\nu + 1$ máme pochopitelně na mysli množinu $\nu \cup \{\nu\} \in H(\omega)$.

Na základě uvedeného tvrzení, které zde nebudeme dokazovat, přestože důkaz není obtížný, lze již snadno nahlédnout, že pro $\nu, \mu \in H(\omega) - \omega$, platí $\mathfrak{M}_\nu \equiv \mathfrak{M}_\mu$ a v důsledku principu κ-kategoričnosti $\mathfrak{M}_\nu \cong \mathfrak{M}_\mu$, jestliže $|\nu| = |\mu|$.

Rejstřík

Literatura

[1] P. Aczel: Non-well-founded sets, *CSLI Lecture Notes No. 14*, Stanford, Ca, 1988

[2] B. Balcar, P. Štěpánek: *Teorie množin*, Academia Praha, 1986

[3] D. Ballard, K. Hrbáček: Standard foundations for nonstandard analysis, *J. Symb. Logic*, 1992, 57, 741–748.

[4] J. Barwise, L. Moss: Vicious Circles, *CSLI Lecture Notes No. 60*, Stanford, Ca

[5] J.L. Bell, A.B. Slomson: Models and Ultraproducts: an introduction. *North-Holland, Amsterdam*

[6] M. Boffa: Forcing et negation de l'axiome de Fondement. *Memoire Acad. Sci. Belg.* tome XL, fasc. 7, 1972

[7] U. Felgner: Comparison of the axioms of local and universal choice. *Fund. Math.* 1971, 71, 43–62.

[8] V. Kanovei, M. Reeken: Internal approach to external sets and universes, Part I, Bounded set theory. *Studia Logica* 1995, 55 (2), 229–257.

[9] V. Kanovei, M. Reeken: Isomorphism property in nostandard extensions of the **ZFC** universe. *Ann. Pure Appl. Log.* 1997, 88, 1–25.