

10. Cvičení z MA I. (25. 4. 2024)

Průběhy funkcí - doplňující příklady (na procvičování)

1. Vyšetřete průběhy následujících funkcí. Zaměřte se na to, zda tyto funkce nabývají globálních a lokálních extrémů (= lok. maxim a minim, (neostrých) glob. maxim a minim).

polynomy:

(a) $f_1(x) = x^2 - x^4$ (b) $f_2(x) = -x^3 - 2x^2 + x + 2$

racionální (lomené) funkce:

(a) $f_1(x) = \frac{1}{1-x^2}$ (b) $f_2(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$

(c) $g(x) = \begin{cases} \frac{|1+2x|}{\sqrt{1-2x+x^2}} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$

gonio/cyklometrické funkce:

(a) $f_1(x) = \frac{\cos x}{2+\sin x}$ (b) $\arccos \left| \frac{1-x}{1-2x} \right|$

exponenciála:

(a) $f_1(x) = e^x - x$ (b) x^x (c) $f_3(x) = x^{1/x}$
(d) $f_4(x) = |x-1| \cdot \exp\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right)$ (e) $f_n(x) = e^x(x+1)^n \quad n \in \mathbb{N}$

3. Další aplikace derivací:

- (a) Ukažte, že obdélník minimalizující obvod při daném obsahu je čtverec.
(b) Z čtvercového listu papíru odstříhneme v rozích malé čtverce a složíme krabičku (bez víka). Jak velké čtverce máme odstříhnout, aby vzniklá krabička měla co největší objem?

4. Vypočtete (můžete např. podle l'Hospitala - ověřte ovšem podmínky!!)

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x}$ (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^5+x^2+1)}{\ln(x^4+x+3)}$
(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k}$ (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(-\frac{1}{x^2})}{x}$