# 10. Cvičení z MA I. (25. 4. 2024)

**A. Taylorův polynom**

Nechť $f$ je funkce definovaná na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a $b \in I$. Nechť má dále $f$ v $b$ vlastní derivace až do řádu $n$ ($n \in \mathbb{N}_0$). Potom definujeme *Taylorův polynom funkce $f$ v bodě $b$ řádu $n$* jako

$$T_n^{f,b}(x) = f(b) + \frac{f'(b)}{1!}(x-b) + \frac{f''(b)}{2!}(x-b)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(b)}{n!}(x-b)^n$$

Platí, že $T(x) = T_n^{f,b}(x)$ je jediný polynom stupně nejvýše $n$, pro který platí:

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x) - T(x)}{(x-b)^n} = 0$$

(Je-li $n = 0$, potřebujeme předpokládat ještě spojitost $f$.)

Označme $R_n^{f,b}(x) := f(x) - T_n^{f,b}(x)$ ... výše uvedené znamená, že $R_n^{f,b}(x) = o((x-b)^n)$.

Víme, že má-li $f$ na $I$ vlastní derivaci řádu $n+1$, pak exisuje $c$ (ostře) mezi $b$ a $x$ takové, že

$$R_n^{f,b}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-b)^{n+1}$$

---

**1.** Najděte Taylorův polynom (řádu např. 5 v bodě $b$) pro následující funkce (odhadněte velikost zbytku):

(a) $f(x) = \operatorname{tg} x$, pro $b = 0$

(b) $f(x) = e^x$, pro $b = 0$ a $b = 1$

**2.** Spočtěte následující limitu pomocí Taylorova polynomu:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$

**3.** Spočtěte přibližně – dá Taylorův polynom 3. stupně odhad s přesností 0.0001?:

(a) $\sin(0.1)$

(b) $\ln(1.2)$