9. cvičení z MA II. (17.4.2019)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Co to je **(totální) diferenciál** funkce $f : G \to R$ ($G \subset R^n$ otevřená) v bodě $a \in G$ (značíme $Df(a)$)?
Jak souvisí totální diferenciál s parciálními derivacemi?
Jak souvisí totální diferenciál s gradientem?

1. Ověřte podle definice, že lineární funkce $L(h_1, h_2) = 2(h_1 + h_2)$ je diferenciálem funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ v bodě $(1, 1)$.

2. Určete směrové derivace funkce $f(x, y, z) = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3}$ v bodě $(0, 0, 0)$. Rozhodněte, zda v tomto bodě existuje diferenciál.

3. Vyšetřete, zda lze funkci $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2} \log(1 + xy)$ dodefinovat v nějakém okolí počátku tak, aby v něm měla diferenciál.

4. Vypočtěte totální diferenciál následujících funkcí f. Jak lze funkci f pomocí tot. diferenciálu odhadnout v okolí bodu $a \in \mathbb{R}^2$, resp. $a \in \mathbb{R}^3$?

(a) $f(x, y) = e^{xy}$ (b) $f(x, y, z) = xy + yz + xz$

5. Vypočtěte totální diferenciál funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ v bodě $a = (1, 2, -1)$; jaká bude jeho hodnota ve směru $h = (-1, 1, 1)$?

6. Ukažte, že pro malá x a y platí:

(a) $(1 + x)^m(1 + y)^n \approx 1 + mx + ny$

(b) $\ln(1 + x)\ln(1 + y) \approx xy$

Domácí úkol na 23.4.2019

1. Buď dána funkce

$$f(x, y) = \arccos \frac{x}{x + y}$$

a) Najděte definiční obor D funkce f a načrtněte jej.
b) Určete gradient funkce $\nabla f(x, y)$ v bodě $[1, 1]$.
c) Je funkce f v tomto bodě diferencovatelná? Pokud ano, napište její totální diferenciál v tomto bodě.
d) Aproximujte f pomocí diferenciálu v bodě [1,04; 0,99].

2. Zjistěte, zda lze funkci $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2+y^2}$ dodefinovat tak, aby měla ve všech bodech R^2 totální diferenciál. Všude, kde existuje, totální diferenciál určete!

3. Vypočtěte totální diferenciál funkce $f(x, y) = \frac{x}{y}$.