8. Cvičení z MA II. (10.4.2019)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Parciální derivace. Nechť $f : G \subset R^n \to R,\ G$ je otevřená, $a \in G$ a $e^i = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0]$ je i-tý vektor kanoniclé báze R^n. *Parciální derivací fce f podle i-té proměnné v bodě a* rozumíme číslo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te^i) - f(a)}{t}$$

(pokud tato limita existuje).
Značení: $C^1(G)$ ...množina fcí, které mají pro každý bod $a \in G$ spojité parc. derivace podle všech proměnných (tj. fce $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ jsou spojité jako fce n proměnných).

1. Určete definiční obor následujících funkcí na R^n, vyšetřete jejich spojitost a vypočtěte parciální derivace všude, kde existují. V zadaném bodě vyčíslete.

(a) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ v bodě $[1, -2]$

(b) $f(x, y, z) = (\frac{x}{y})^z$ v bodě $[e, 1, 2]$. Vypočtěte též parciální derivace 2. řádu!

2. Druhé parciální derivace se mohou lišit v závislosti na pořadí derivací:

$f(x, y) = xy$ pro $|x| \geq |y|$ a $f(x, y) = 0$ pro $|x| < |y|$

3. Co to je **směrová derivace**? Jak souvisí směrová darivace s parciálními derivacemi? Vypočtěte derivace následující funkce f v zadaném směru h v zadaném bodu a.

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ ve směru $v = (-1, 1, 1)$ v bodě $a = (1, 2, -1)$

4. (Procvičte doma) Určete definiční obor následujících funkcí na R^n, vyšetřete jejich spojitost a vypočtěte parciální derivace všude, kde existují:

(a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2} + 1$

(b) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ pro $[x, y] \neq 0,\ f(0, 0) = 0$

(c) $F(x, y) = g(xy, \frac{x}{y})$ vyčíslete v bodě $A = (3, 2)$.

5. (Procvičte doma.) Vypočtěte derivace následujících funkcí f v zadaných směrech v v zadaných bodech a.

(a) $f(x, y) = \text{arctg}\ xy$ ve směru $v = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ v bodě $a = (1, 1)$

(b) $f(x, y) = e^{x-y^2}$ ve směrech $(1, 0),\ (-1, 0),\ (1, 1)$ v bodě $(0, 0)$

Domácí úkol na 15.4.2019:

1. Určete definiční obor následující funkce, vyšetřete jejich spojitost a vypočtěte parciální derivace všude, kde existují

   $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pro $[x,y] \neq 0$, $f(0,0) = 0$

2. Určete definiční obor následující funkce a vypočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu všude, kde existují:

   $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{x+y}$, vyčíslete v bodě $[1,1]$

3. Vypočtěte derivaci funkce $f(x,y,z) = \sin(xyz)$ ve směru $(2,1,1)$ v bodě $(1,1,0)$.

Řešení:

1a. spojitá na R^2
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{y \cdot \operatorname{sgn}(xy)}{\sqrt{|xy|}}$ pro $x \neq 0,\ y \neq 0$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{x \cdot \operatorname{sgn}(xy)}{\sqrt{|xy|}} \cdot$ pro $x \neq 0,\ y \neq 0$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ neex. pro $y \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$ pro $y \neq 0$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0$ pro $x \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ neex. pro $x \neq 0$

4a. spojitá na R^2
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+4y^2}}$ pro $[x,y] \neq [0,0]$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{8y}{\sqrt{x^2+4y^2}}$ pro $[x,y] \neq [0,0]$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ neex., $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ neex.

4b. spojitá na R^2
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) - \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot \cos(\frac{1}{x^2+y^2})$ pro $[x,y] \neq [0,0]$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) - \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot \cos(\frac{1}{x^2+y^2})$ pro $[x,y] \neq [0,0]$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$