

## Doplňující cvičení z MA II. – Aplikace určitého integrálu

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

### 1. Plocha pod křivkou.

Pro křivku  $y = f(x)$  (pro  $x \in \langle a, b \rangle$ ) má plocha pod křivkou obsah  $\int_a^b f(x) dx$ . Je-li křivka dána parametricky  $x = \phi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  (pro  $t \in \langle a, b \rangle$ ;  $\phi(t)$  a  $\psi(t)$  spojité;  $\phi(t)$  ryze mon. se spoj. derivací na  $\langle a, b \rangle$ ), pak je plocha pod touto křivkou  $\int_a^b \psi(t)\phi'(t) dt$ .

Najděte obsah omezené rovinné oblasti ohraničené křivkami, resp. odvodte vzorec pro obsah:

- ( ) vzorec pro obsah kružnice
- (a) obsah onlasti dané sinusovkou na  $\langle 0, \pi \rangle$
- (b)  $y = x^2$ ,  $y = x$
- (c)  $y = \cos x$ ,  $y = \sin x$ ,  $x = 0$  a  $x = \frac{\pi}{2}$
- (d)  $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $y = \frac{1}{1+4x^2}$ ,  $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- (e) Určete plochu obdélníku.

### 2. Délka křivky.

Délka křivky  $y = f(x)$  ( $x \in \langle a, b \rangle$ ) je dána předpisem  $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ .

Délka křivky dané parametricky  $x = \phi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  (pro  $t \in \langle a, b \rangle$ ;  $\phi(t)$  a  $\psi(t)$  mají spoj. derivace na  $\langle a, b \rangle$ ) je  $\int_a^b \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt$ .

- (a) Najděte délku křivky  $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$  na intervalu  $x \in \langle 0, 3 \rangle$ .
- (b) Spočítejte délku kružnice o poloměru  $r$ .

### 3. Objem rotačního tělesa.

Objem rotačního tělesa vzniklého rotací křivky  $y = f(x)$  ( $x \in \langle a, b \rangle$ ) kolem osy  $x$  je  $\int_a^b \pi f(x)^2 dx$ .

- (a) Necht  $M$  je oblast ohraničená grafem funkce  $f(x) = \sqrt{x \cdot \sin x}$  a osou  $x$  na intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$ . Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací  $M$  kolem osy  $x$ .
- (b) Ověřte vzorec pro výpočet objemu kužele s poloměrem podstavy  $r$  a výškou  $v$ .
- (c) Nekonečný “trychtýř” vzniklý rotací funkce  $f(x) = \frac{1}{x}$  pro  $x \in \langle 1, \infty \rangle$  kolem osy  $x$ .
- (d) Těleso vzniklé rotací funkce  $y = \sqrt[3]{x}$  pro  $y \in [1, 2]$  kolem osy  $y$ .

Tip (nenapadne-li vás něco lepšího): **Guldinovo pravidlo pro objem:** Objem rotačního tělesa vzniklého rotací rovinné množiny  $M$  kolem přímky  $p$ , neprotínající množinu  $M$ , je rovna součinu obsahu množiny  $M$  a délky kružnice o poloměru rovném vzdálenosti těžiště množiny  $M$  od  $p$ .

#### 4. Povrch rotačního tělesa ... nebylo na přednášce

Povrch tělesa vzniklého rotací křivky  $y = f(x)$  ( $x \in \langle a, b \rangle$ ) kolem osy  $x$  je  $\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ .

(a) Paraboloid (satelitní anténa) vzniklá rotací křivky  $y = c\sqrt{x}$  pro  $x \in \langle 0, b \rangle$ .

(Reálné parametry by mohly být  $b = 0.3m$ ,  $c = 1.8m^{1/2}$ ).

(b) Anuloid vniklý rotací kružnice o poloměru  $r$  kolem osy procházející rovinou kružnice a vzdálené  $R$  od jejího středu;

(d) Jednodílný hyperboloid (chladicí věž elektrárny) daný rovnicí  $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 - (\frac{z}{c})^2 = 1$

(U Temelína je patní průměr 130.7m, průměr v koruně 82.6 m, výška 155 m. Dost jistě je  $a = b$ ,  $c$  už lze dopočítat.)

(e) Nekonečný “trychtýř” vzniklý rotací funkce  $f(x) = \frac{1}{x}$  pro  $x \in \langle 1, \infty \rangle$  kolem osy  $x$ .

Tip: **Guldinovo pravidlo pro povrchy:** Plocha rotační plochy vytvořené rotací rovinné křivky  $\phi$  kolem přímky  $p$  je rovna součinu délky křivky  $\phi$  a obvodu kružnice o poloměru rovném vzdálenosti těžiště křivky  $\phi$  od  $p$ .

#### 5. Odhady sum – integrální kritérium.

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  ( $s > 0$ )                      (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log n}$

(c) Odhadněte (pomocí integrálu) velikost  $n!$  .

Tip: Použijte logaritmus.

#### Bonusové úkoly:

1. Určete plochu elipsy.
2. Určete délku křivky  $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$  na intervalu  $x \in \langle 0, \gamma \rangle$  (kde  $a, \gamma > 0$  parametry)
3. Určete objem anuloidu (duše od pneumatiky) vzniklého rotací kružnice o poloměru  $r$  kolem osy procházející rovinou kružnice a vzdálené  $R$  od jejího středu.

Tip: rovnice anuloidu  $\dots(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2)$