

7. Cvičení z MA II. (3.4.2019)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Spojitosť. Jak se definuje spojitá funkce (různé definice)?

1. UkaŹte, Źe polynomy více proměnných jsou spojitě funkce $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

2. Zkoumejte následující funkce na $(\mathbb{R}^n, \text{eukleid. metrika})$ – určete definiční obor (jde o ot. či uz. množinu?), spojitost, vrstevnice. Nabývají tyto funkce na svém definičním oboru globálního maxima a minima?

$$(a) \quad f(x, y) = \sqrt{\log(x - y)} \quad (b) \quad f(x, y) = \log(\sqrt{y + 1} - x) \quad (c) \quad f(x, y) = \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}} - 1$$

3. Jsou následující fce spojitě? A lze je dodefinovat spojitě na \mathbb{R}^2 ? Jak? Nabývají tam své největší a nejmenší hodnoty? Jaké?

$$(a) \quad f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \quad (b) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$
$$(c) \quad f(x, y) = (x + y)^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \quad (d) \quad f(x, y) = \frac{\sin xy}{x^2 + y^2}$$

4. Charakteristika spojitých funkcí pomocí otevřených (uzavřených) množin:

(a) Platí: Funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá, právě když vzor každé otevřené (uzavřené) množiny v \mathbb{R} je otevřená (uzavřená) množina v \mathbb{R}^n

(b) UkaŹte pomocí tvrzení (a): $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 5, xy + yz + xz = 8\}$

5. Příklady k procvičování (na doma) – určete definiční obor (jde o ot. či uz. množinu?) a rozhodněte, zda jde o spojitou funkci, příp. zda ji lze spojitě rozšířit. spojitost

$$(a) \quad f(x, y, z) = \sqrt{\frac{z^2}{x^2 + y^2} - 1} \quad (b) \quad f(x, y) = x^2 - y^2 \quad (c) \quad f(x, y) = \frac{x}{y}$$
$$(d) \quad f(x, y) = \arcsin xy \quad (e) \quad f(x, y) = \arcsin \frac{y}{x+1} \quad (f) \quad f(x, y) = \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Domácí úkol na 8.4.2019:

U příkladů (1) a (2) vyšetřete spojitost. Lze dané funkce spojitě dodefinovat na \mathbb{R}^2 ?

$$(1) \quad f(x, y) = \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2}$$

$$(2) \quad f(x, y) = \frac{\sin x + \sin y}{x + y}$$

(3) UkaŹte, Źe je-li funkce f spojitá na \mathbb{R}^n , potom množina M je otevřená:

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) < 0\}$$

Řešení:

2a-c. spojité na svých definičních oborech

3a. není spojitá v b. $[0, 0]$, omezená

3b. spojitá, není omezená

3c. spojitá pro $f([0, 0]) := 0$

3d. nelze spojitě dodefinovat v b. $[0, 0]$

5a-e. spojité na svých definičních oborech

5f. spojitá pro $f([0, 0]) := 0$