

2.-3. Cvičení z MA II. (27. 2. a 6. 3. 2019)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Co jsou to primitivní funkce? Jaké má vlastnosti (spojitost)? Kdy má funkce primitivní funkci (spojitost)?

1. Určete primitivní funkce k následujícím funkcím (na největších možných intervalech):

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & \int x^3 + 2x + \frac{16}{x} dx & \text{(b)} \quad \int 18e^x + 16e^{8x} - \frac{1}{x} + 3 \cos x dx & \text{(c)} \quad \int \cos^2 \frac{x}{2} dx \\ \text{(d)} & \int (3e^x + \frac{1}{x}) dx & \text{(e)} \quad \int (\frac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{x}) dx & \text{(f)} \quad \int \frac{x^2-1}{x} dx \\ \text{(g)} & \int (\sqrt[3]{x} + x^2) dx & \text{(h)} \quad \int \operatorname{tg}^2 x dx & \text{(i)} \quad \int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx \end{array}$$

2. Per partes:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & \int \log x dx & \text{(b)} \quad \int (x^2 - x) \exp(x) dx & \text{(c)} \quad \int x \sin x dx \\ \text{(d)} & \int e^x (\sin x + \cos x) dx & \text{(e)} \quad \int \sqrt{x} \log^2 x dx & \text{(f)} \quad \int \sin^7 x \cos x dx \\ \text{(g)} & \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx & \text{(h)} \quad \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx & \text{(i)} \quad \int x^n e^x dx, \text{ kde } n \geq 0 \end{array}$$

3. ‘Lepení’ primitivních funkcí – určete primitivní funkce na největším možném intervalu:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \int |x| dx & \text{(b)} & \int f(x) dx, \text{ kde } f(x) = 0 (x \leq 0), f(x) = x (x > 0) \\ \text{(c)} & \int \sqrt{x^6} dx & \text{(d)} & \int |\cos x| dx \end{array}$$

4. Určete primitivní funkce: metoda substituce.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & \int \sqrt[3]{1-3x} dx & \text{(b)} \quad \int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx & \text{(c)} \quad \int \frac{x}{\sqrt{2+5x^2}} dx \\ \text{(d)} & \int \frac{\log^2 x}{x} dx & \text{(e)} \quad \int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx & \text{(f)} \quad \int x e^{-x^2} dx \\ \text{(g)} & \int \operatorname{tg} x dx & \text{(h)} \quad \int \operatorname{cotg} x dx & \text{(i)} \quad \int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx \\ \text{(j)} & \int \sqrt{1-x^2} dx & \text{(k)} & \int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} dx \end{array}$$

5. Určete primitivní funkce: doplnění na čtverec a rozklad na parciální zlomky.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & \int \frac{1}{(3x^2-2x-1)} dx & \text{(b)} \quad \int \frac{1}{\sqrt{8+6x-9x^2}} dx & \text{(c)} \quad \int \frac{x^2+2x}{x+3} dx \\ \text{(d)} & \int \frac{3x+4}{x^2+3x+5} dx & \text{(e)} \quad \int \frac{1}{(3x+1)(x-1)} dx & \text{(f)} \quad \int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx \\ \text{(g)} & \int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} dx & \text{(h)} \quad \int \frac{2x}{(x+1)(x^4+2x^2+1)} dx & \text{(i)} \quad \int \frac{8+6x-2x^2}{x^4-4x+3} dx \\ \text{(j)} & \int \frac{x}{(x^2+2x+2)^2(x^2+2x-3)} dx & & \end{array}$$

Tipy pro substituce:

- 'mocnina' ... $t = ax^k + b$ ($dt = akx^{(k-1)}dx$)
- goniometrické ... $R = \frac{P}{Q}$, kde P, Q polynomy
 - $t = \sin x$, pokud $R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, -\cos)$, tj. 'lichá wrt $\cos x$ '
 - $t = \cos x$, pokud $R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos)$, tj. 'lichá wrt $\sin x$ '
 - $t = \operatorname{tg} x$, pokud $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos)$, tj. 'sudá wrt $\sin x, \cos x$ '
 - $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, univerzální, ale nepříjemná
- odmocnina ...
 - $t = \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, pro $R(x, \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}})$, $q \in N, ad - bc \neq 0, a, b, c, d \in R$
 - $t = \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, pro ${}^q\sqrt{S^{p_1}}, \dots, {}^q\sqrt{S^{p_n}}$; $S = (\frac{ax+b}{cx+d})$; $s = NSN(q_1, \dots, q_n)$
- eulerova ... $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax} + t$ nebo $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$,
pokud $ax^2 + bx + c$ nemá R kořeny a $a > 0, c > 0$

Domácí úkol na 4. 3. 2019:

Vypočítejte na celém intervalu, kde to dává smysl:

- (1) $\int \frac{1}{(x-a)^n} dx$, kde $n \in N, a \in R$
- (2) $\int |\sin x + \cos x| dx$
- (3) $\int 5^x \sin x dx$
- (4) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$

Řešení: (až na c)

- 1a. $\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 16 \log|x|$, na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$
1b. $18e^x + 2e^{8x} - \log|x| + 3 \sin x$, na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$
1c. $\frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2}$, na R
...

- 2a. 2b. $(x^2 - 3x + 3) \exp x$, na R
2c. $\sin x - x \cos x$, na R
2d. $e^x \sin x$, na R
2e. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}(\log^2 x - \frac{4}{3} \log x + \frac{8}{9})$, na $(0, +\infty)$
2f. $\frac{1}{8} \sin^8 x$, na R
2g. $\frac{1}{2}(\frac{x}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x)$, na R
2h. $I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n$, pro $n \in N$ na R
2i. $J_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \cdot x^{n-k}$

- 3a. $\operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{x^2}{2}$, na R
3b. $F(x) = c$ na $< -\infty, 0 >$, $F(x) = \frac{x^2}{2}$ na $< 0, \infty >$
3c. $\frac{1}{4}|x| \cdot x^3$, na R
3d. $(-1)^k \sin x + 2k$, na $x \in < -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi >$, $k \in Z$

- 4a. $-\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}$, na R
4b. $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}$, na R
4c. $\frac{1}{5} \cdot \sqrt{2+5x^2}$, na R
4d. $\frac{1}{3} \log^3 x$, na $(0, +\infty)$
4e. $\frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{2}$, na $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
4f. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$, na R
4g. $-\log|\cos x|$, na každém $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in Z$
4h. $\log|\sin x|$, na každém $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in Z$
4i. $2\sqrt{x} - 2 \log|1 + \sqrt{x}|$ na $(0, +\infty)$
4j. $\frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2})$, na $(-1, 1)$
4k. $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}$, na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$

- 5a.
5b. $\frac{1}{3} \cdot \arcsin(x - \frac{1}{3})$, na $(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$
5c. $\frac{x^2}{2} - x + 3 \ln|x+3|$, na $(-\infty, -3)$ a na $(-3, \infty)$
5d. $\frac{3}{2} \ln(x^2 + 3x + 5) - \frac{1}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{11}}(2x+3)$, na R
5e. $F(x) = \frac{1}{4} \log|\frac{x-1}{3x+1}|$, na $(-\infty, -\frac{1}{3})$ a na $(-\frac{1}{3}, 1)$ a na $(1, \infty)$
5f. $\log|x-2| + \log|x+5|$ na $(-\infty, -5)$ a na $(-5, 2)$ a na $(2, \infty)$
5g. $\frac{1}{2}(x+1)^2 + \log|x-1| - \frac{1}{2} \log(x^2+1) - \operatorname{arctg} x$ na $(-\infty, 1)$ a na $(1, \infty)$
5h. $F(x) = -\frac{1}{2} \log|x+1| + \frac{1}{4} \log(x^2+1) + \frac{1}{2} \frac{x-1}{x^2+1}$, na $(-\infty, -1)$ a na $(-1, \infty)$
5i.
5j. $F(x) = -\frac{1}{50} \log(x^2 + 2x + 2) + \frac{1}{10} \frac{x+2}{x^2+2x+2} + \frac{1}{100} \log|x-1| + \frac{3}{100} \log|x+3| + \frac{7}{50} \operatorname{arctg}(x+1)$, na $(-\infty, -3)$, na $(-3, 1)$ a na $(1, \infty)$