

10. a 11. Cvičení z MA II. (24.4. a 2.5.2019)

Lokální a globální extrémy funkce, extrémy na množině

1. Najděte všechny lokální extrémy následujících funkcí (na definičním oboru):

(a) $f(x, y) = x^2 + |\arctg y| - x^8$

(b) $f(x, y) = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

(c) $f(x, y) = xy \log(x^2 + y^2)$

2. Vyšetřete globální extrémy funkce f na množině M .

$$f(x, y) = x + 2y + \frac{3}{4}x^2 + xy + 2y^2 \quad \text{na } M = \{x, y\}; y^2 - 2 \leq x \leq -y^2 + 2\}$$

Co to je Hessova matice funkce f v bodě a ? Co znamená, že je matice pozitivně / negativně (semi)definitní / indefinitní? Kdy to nastává?

Věta: Spojité funkce na kompaktu nabývají maxima a minima.

Hessova matice je matice 2. derivací (H_f). Nechť existuje $\nabla f(a)$ a $H_f(a)$:

- (i) jestliže $\nabla f(a) \neq \bar{0}$, pak f nemá v a extrém;
- (ii) jestliže $\nabla f(a) = \bar{0}$ a $H_f(a)$ pozitivně definitní, pak f má v a ostré lok. minimum;
- (iii) jestliže $\nabla f(a) = \bar{0}$ a $H_f(a)$ negativně definitní, pak f má v a ostré lok. maximum;
- (iv) jestliže $\nabla f(a) = \bar{0}$ a $H_f(a)$ indefinitní, pak f nemá v a lok. extrém.

Sylvestrovo kritérium: Kvadratická forma $q : R^n \rightarrow R$ je

- (i) poz. definitní, jsou-li všechny hlavní subdeterminanty matice kladné;
- (ii) neg. definitní, střídají-li hlavní subdeterminanty znaménka (počínaje záporným);
- (iii) indef., jsou-li všechny hlavní subdeterminanty matice nenulové a neplatí (i) ani (ii).

3. Najděte všechny lokální extrémy následujících funkcí:

(a) $f(x, y) = x(3 - x^2) - y^2$

(b) $f(x, y) = \frac{x^3}{3} - xy + \frac{y^2}{2}$

(c) $f(x, y, z) = -x^3 + 3xz + 2y - y^2 - 3z^2$

(d) $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$

(e) $f(x, y) = 27xy^2 + 14x^3 - 69x - 54y$

4. Vyšetřete extrémy následujících funkcí na zadané množině:

(a) $f(x, y) = xy^2$ na $M = \{[x, y] \in R^2; x^2 + y^2 = 1\}$

(b) $f(x, y) = \sqrt{3}x - y + 2$ na $M = \{[x, y] \in R^2; x^2 + 2x + y^2 = 0\}$

Domácí úkol na 30.4.2019:

- (1) Najděte globální extrémů funkce f na množině M : $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11$,
 $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 4x \leq 5\}$

- (2) Vyšetřete globální a lokální extrémů funkce f na množině M : $f(x, y) = x^2 - y^2$,
 $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y + e^{-x^2} - 1 = 0\}$

- (3) Vyšetřete globální extrémů funkce f na \mathbb{R}^2 :
 $f(x, y) = (x^2 + 7y^2) \cdot e^{-5x^2 - 2y^2}$