1. Cvičení z MA II. (20. 2. 2019)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

A. Aplikace průběhů funkcí
Jak se pomocí derivace pozná, kde má funkce maximum/minimum? Kde je rostoucí/klesající? Co je tečna funkce v daném a jak souvisí s konvexitou?

1. Který z obdélníků o obvodu l má největší obsah?

2. Který z válců o objemu V má nejmenší povrch?

3. Z čtvercového listu papíru odstřihneme v rozích malé čtverce a složíme krabičku (bez víka). Jak velké čtverce máme odstřihnout, aby vzniklá krabička měla co největší objem?

4. Bazén má mít tvar pravoúhlého rovnoběžnostěnu s objemem 200 m^3. Délka má být čtyřnásobkem šířky. 1 m^2 základny je dvakrát levnější než 1 m^2 stěny. Jaké mají být rozměry bazénu, aby její stavba byla nejlevnější?

5. Z chodby o šířce A odbočuje chodba o šířce B. S jak dlouhou tyčí je možno zatočit? (Pro jednoduchost: tyč chceme nést vodorovně.)

B. Taylorův polynom
Co je Taylorův polynom funkce f v zadaném bodě a (značení $T_n^{f,a}$)?
Jak je tento polynom charakterizován (pro $x \to a$)?

1. Najděte Taylorův polynom (řádu např. 5 v bodě a) pro následující funkce:

(a) $f(x) = \operatorname{tg} x,\ a = 0$ (b) $f(x) = e^x$

(c) $f(x) = \log(1 + x)$ (d) $f(x) = \sin x$

(e) $f(x) = \cos x$ (f) $f(x) = (1 + x)^2$

2. Najděte Taylorův polynom řádu $\mathbb{N}$ v bodě 0 pro následujících funkce. Konverguje tento polynom k zadané funkci (tj. pro $\mathbb{N} \to \infty$)?

(a) $f(x) = e^{-x^2}$ (b) $f(x) = xe^{2x}$

(c) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$ (d) $f(x) = \frac{x}{9+x^2}$

(e) $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$ (f) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

3. Pomocí Taylorova polynomu spočtěte následující limity:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

(c) $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt[6]{x^6+x^5} - \sqrt[6]{x^6-x^5} \right)$.

4. Spočtěte přibližně (můžete bez odhadu chyby) následující čísla: $\cos 0.1$, $\sqrt{0.98}$, $\sqrt[3]{1279.03}$, $e^{0.01}$, $\log 1.2$, $\sqrt[12]{1.03}$, 1.01^5, ...

Domácí úkol na 25. 2. 2019:

1. Dokažte, že funkce $(1+1/x)^x$ je rostoucí ($x \in R^+$). [1 bod]

2. Odhadněte hodnotu $\sin 0,1$. Pro která x můžeme odhadnout $\sin x$ jako $x - \frac{x^3}{3!}$ s přesností na tři desetinná místa? [1 bod]

3. Rozveďte následující funkci v řadu: [1 bod]

$$y(x) = \frac{1}{1+x+x^2+x^3}$$

BONUS. Jak velký sněhulák (ze tří koulí) lze vyrobit z koule o poloměru 1 metr? [2 body]
Můžete (bez dokazování) užít tzv. Jensenovu nerovnost:
Pro konvexní funkci f na $\langle a,b\rangle$ a čísla $x_i \in \langle a,b\rangle$ a α_i taková, že $\alpha_i \in \langle 0,1\rangle$, $\sum_i \alpha_i = 1$ platí:

$$f(\sum_i \alpha_i x_i) \le \sum_i \alpha_i f(x_i)\,.$$

Řešení:

1. $T_5^{\mathrm{tg},0}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$

2a. $\sum_{n=0}^{N/2}(-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{-x^{2n}}{n!}$

2b. $\sum_{n=0}^{N-1} \frac{2^n x^{n+1}}{n!}$, pro $x \in R$

2c. $\sum_{n=0}^{N} 0 \cdot x^n = 0$ nekonverguje k $f(x), x \neq 0$

2d. $\sum_{n=0}^{(N-1)/2}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$, na $(-3, 3)$

2e. $2 \cdot \sum_{n=0}^{(N-1)/2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pro $|x| < 1$

2f. $\sum_{n=0}^{N}(n+1)x^n$, na $(-1, 1)$

3a. $-\frac{1}{12}$

4. $0.099\,833,\ 0.995\,004,\ 0.989\,949,\ 12.002\,3,\ 1.010\,050,\ 0.182\,321,\ 0.693\,147,\ 1.002\,466,\ 1.051\,010$