Opravné příklady k zápočtu z MA II.

1. Najděte délku oblouku křivky dané parametrickými rovnicemi

$$x = a(t - \sin t)\ ,\ y = a(1 - \cos t)\ ,\ \text{kde } 0 \leq t \leq 2\pi .$$

2. Najděte délku oblouku křivky dané rovnicí

$$x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\log y\ ,\ \text{kde } 1 \leq y \leq e .$$

3. Vypočtěte

$$(R)\int_0^{+\infty} \frac{x \log x}{(1+x^2)^2}\ \mathrm{d}x .$$

4. Vypočtěte

$$(R)\int_0^{+\infty} \exp(-ax)\cos bx\ \mathrm{d}x\ ,\ \ a, b > 0 .$$

5. Vyšetřete konvergenci integrálu (tj. buď integrál spočítejte, nebo integrovanou funkci odhadněte pomocí funkce, jejíž integrál umíte spočítat):

$$(N)\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}\ \mathrm{d}x\ .$$

6. V závislosti na parametru $p \in R$ vyšetřete konvergenci integrálu (viz výš)

$$(N)\int_0^{+\infty} x^{p-1}\exp(-x)\ \mathrm{d}x\ .$$

7. Zjistěte, zda lze následující funkci f dodefinovat tak, aby v zadaných bodech byly všechny parc. derivace spojité:

$$f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^2+y^2}\ ,\ \ \text{na } R\ .$$

8. Ukažte, že existují funkce $y = y(x)$ a $z = z(x)$ třídy C^1, kde $y(1) = e$ a $z(1) = 1$, které na jistém okolí bodu 1 splňují následující vztahy:

$$e^z - xyz = 0$$

$$\ln xy - \frac{x}{z} = 0$$

Vypočtěte $y'(1)$ a $z'(1), y''(1)$ a $z''(1)$.

9. Je dána rovnice

$$e^z + x^2 y + z + 5 = 0$$

Ukažte, že existuje funkce $z = z(x,y)$, která je dána implicitně touto rovnicí a podmínkou $z(1,-6) = 0$.

Určete $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-6)$ a $\frac{\partial z}{\partial y}(1,-6)$.

10. Buď dána funkce
$$f(x,y) = \arccos\frac{x}{x+y}$$
a) Najděte definiční obor D funkce f a načrtněte jej.
b) Určete gradient funkce $\nabla f(x,y)$ v bodě $[1,1]$.
c) Je funkce f v tomto bodě diferencovatelná? Pokud ano, napište její totální diferenciál v tomto bodě.
d) Aproximujte f pomocí difrrenciálu v bodě [1,04; 0,99].

11. Buď dána funkce
$$f:(x,y) = \sqrt{\frac{1}{|1-x^2-y^2|}}$$
a) Najděte definiční obor D funkce f a načrtněte jej. Pokud to lze, najděte fci F, která je spojitým rozšířením fce f na R^2.
b) Vypočítejte gradient $\nabla f(x,y)$ v bodě $[1,1]$. Zjistěte, v jakých bodech má fce f totální diferenciál. Pokud má fce f tot. diferenciál v b. $[1,1]$, spočtěte ho.
c) Aproximujte hodnotu funkce f v bodě $[1,02;0,99]$ pomocí totálního diferenciálu $D_{f(1,1)}$.
d) Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $[0,0,?]$.

12. Buď dána funkce
$$f:(x,y) = \log(\sqrt{y+1}-x)$$
a) Najděte definiční obor D funkce f a načrtněte jej.
b) Vypočítejte gradient $\nabla f(x,y)$ v bodě $[0,0]$.
Pokud má f v tomto bodě totální diferenciál, určete ho.
c) Určete rovnici tečné roviny v bodě $[0,0]$.
d) Vypočítejte přibližně pomocí lineární aproximace $f(-0,04;0,02)$.

13. Určete globální extrémy zadané funkce f na množině M:
$$f(x,y) = xy + 2x + 3y$$
$$M = \{[x,y] \in R^2;\ 4x^2 + 9y^2 < 36 \ \&\ y \le -\frac{x}{2}\}$$

14. Určete globální extrémy zadané funkce f na množině M:
$$f(x,y) = (x+y)\cdot e^{-(x^2+y^2)}$$
$$M = \{[x,y] \in R^2;\ x^2 + y^2 \le 1 \ \&\ |x| \le y+1\}$$

15. Určete globální extrémy zadané funkce f na množině M:
$$f(x,y,z) = xyz$$

$$M = \{[x, y, z] \in R^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ \&\ x + y + z = 0\}$$