

9. Cvičení z MA I. (4. 12. 2018)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Co je to funkce? Jak se definuje limita funkce v bodě? Kdy je funkce spojitá? Kdy je funkce rostoucí?

1. Dokažte, že funkce f je na intervalu I rostoucí, právě když platí

$$\forall x, y \in I, x \neq y : \frac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0$$

2. Dokažte, že je-li f neklesající na $(-\infty, a)$ a nerostoucí na $(a, +\infty)$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$, pak f nabývá maxima.

3. Necht f nabývá minima v $a \in \mathbb{R}$. Musí existovat $\epsilon > 0$ takové, že f je nerostoucí na $(a - \epsilon, a)$ a neklesající na $(a, a + \epsilon)$?

4. Které z následujících operací provedených na neklesající funkce f, g dává opět neklesající funkci?

(a) $f + g$ (b) $f - g$ (c) $\max\{f, g\}$ (d) $\min\{f, g\}$ (e) $f \circ g$

5. Spočítejte limity nebo dokažte, že neexistují.

(a) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$, pokud $a = 0, 1, +\infty, -\infty$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$ (d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^3-x^2-x+1}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ (j) $\lim_{x \rightarrow 1} (\lfloor x \rfloor - x)$ (k) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$

6. Rozhodněte, zda je v bodě $x = 0$ možné spojitě dodefinovat funkci, která je na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dána předpisem: $f(x) = e^{|x|}$.

7. Další příklady – spočítejte limity nebo dokažte, že neexistují.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ ($n \in \mathbb{N}$) $[\frac{1}{n}]$ (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m-1}{x^n-1}$ ($m, n \in \mathbb{N}$) $[\frac{m}{n}]$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+x^2+\dots+x^n-n}{x-1}$ $[\frac{1}{2}n(n+1)]$ (d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ ($m, n \in \mathbb{N}$) $[\frac{n}{m}]$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$ $[\frac{1}{2}mn(n-m)]$

8. A ještě další příklady – spočítejte následující limity:

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1} \quad [-\infty] \qquad (b) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \left(\pi \cdot \frac{4\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}}{2\sqrt[4]{x^2 + 1}} \right) \quad [0]$$

$$(c) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} x \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) \right) \quad [-1]$$

$$(d) \quad \lim_{x \rightarrow 16} \sqrt{\frac{4 - \sqrt{x}}{64 - \sqrt{x^3}}} \quad \left[\frac{1}{4\sqrt{3}} \right] \qquad (e) \quad \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\sqrt[3]{1-x^2} - 1}{5x^2}} \quad \left[e^{-\frac{1}{15}} \right]$$

$$(f) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\cos x + 2}{x^2 + x}} \quad [0]$$

$$(g) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arccotg} x}{x} \quad [0] \qquad (h) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2-x} \right) \right)^2 \quad \left[\frac{\pi^2}{4} \right]$$

Důležité: zapamatujte si, že platí! (dokážeme později):

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad (b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \qquad (c) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Dů. (11.12.2018) Spočítejte limity nebo dokažte, že neexistují.

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \sqrt{(x+a)(x+b)} - x \right\} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$