2. Cvičení z MA I. (9.10.2018)

Markéta Lopatková

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Jak probíhá důkaz **matematickou indukcí**? (A jaké další typy důkazů znáte?)

1. Dokažte, že pro všechna přirozená n platí:

(a) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (b) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(c) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2 \quad (= \sum_{k=1}^{n} k)^2$

(d) Vypočítejte $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ (e) Vypočítejte pro $x \in R$: $\sum_{k=1}^{n} x^k$

2. Dokažte tzv. de Morganova pravidla pro množiny A a B_i $(i = 1 \,..\, n)$:

(a) $A \setminus \bigcap_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A \setminus B_i)$

(b) $A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcap_{i=1}^{n} (A \setminus B_i)$

3. Dokažte pomocí matematické indukce, že pro všechna přirozená n a reálná $x > -1$ platí tzv. **Bernoulliho nerovnost**:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

4. Dokažte pro všechna přirozená n:

(a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$ pro $n \geq 2$ (b) $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$

5. Dokažte pro všechna přirozená n a reálná x taková, že $0 \leq x_k \leq \pi$:

$$|\sin\,(\sum_{k=1}^{n} x_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} \sin x_k$$

6. Vlastnosti zobrazení.

(a) Mějme množinu A. Je-li A konečná, pak funkce z A do A je prostá právě tehdy, když je 'na'.

(b) Pro nekonečné množiny to neplatí – najděte například funkci z přirozených čísel do přirozených čísel, která (i) je prostá a není 'na', (ii) není prostá a je 'na' a která (iii) je 'na' a navíc má každá prvek nekonečně mnoho vzorů.

7. Mějme zobrazení $f : X \to Y$ a množiny $A, B \subset X$. Jaké musí mít f, A, B vlastnosti, aby platily následující vztahy?

(a) $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$ (b) $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$

(c) $f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$ (d) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$

Domácí úkol (termín 15.10.2018):
Dokažte, pro která přirozená n platí následující odhady:

(a) $n^2 \leq 2^n$

(b) $n! \leq (\frac{n+1}{2})^n$

(Platí též odhad faktoriálu zdola $(\frac{n}{e})^n \leq n!$, kde e je základ přirozeného logaritmu (pro důkaz potřeba následující nerovnost $(1 + \frac{1}{n})^n \leq e$).)