

11. Cvičení z MA I. (18.12.2018)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

A. Limity funkcí.

1. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

2. Spočítejte následující limity:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+2^x)}{x}$ [ln 2] (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ [1]

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x}$ [1] (d) $\lim_{x \rightarrow 0} (2e^x - 1)^{\frac{x^2+1}{x}}$ [e^2]

(e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{\sqrt{n^3+3n^2}}$

B. Derivace. Co to je a jak se počítá derivace – aritmetika derivací, derivace složené funkce, derivace inverzní funkce. Co je jednostranná derivace a jak se počítá?

3. Určete ve všech bodech definičního oboru funkcí, zda existují (jednostranné) derivace, případně čemu se rovnají. Lze tyto funkce spojitě rozšířit?

(a) $\operatorname{sgn} x$ (b) $|x|$ (c) $\frac{1}{4} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}$ (d) $\left|\frac{x-1}{1-2x}\right|$ (e) $\frac{(\ln x)^x}{x \ln x}$

(f) $\sqrt[3]{(1 - \exp(1 - x^2))^2}$ (g) $\sqrt{1 - \exp(-x^2)}$

4. Ještě další derivace:

(a) $\arcsin \left| \frac{5x+2}{3x-6} \right|$ (b) $\sqrt{\sin x \cos x}$ (c) $\sqrt{\operatorname{arctg}(\ln^2 x)}$

Dů. (4.1.2019) Vypočtěte derivace funkcí (včetně jednostranných):

(a) $f(x) = (x-a)^2(x-b)^2$ pro $x \in \langle a, b \rangle$, $f(x) = \frac{1}{e}$ pro všechna ostatní x

(b) $g(x) = x^2 e^{-x^2}$ pro $|x| \leq 1$, $g(x) = \frac{1}{e}$ pro $|x| > 1$

Bonusový příklad. Určete ve všech bodech definičního oboru následující funkce f , zda existují (jednostranné) derivace, případně čemu se rovnají. Lze tuto funkci spojitě rozšířit?

$$f(x) = (\sin x)^{|\cos x|}$$

Výsledky:

3a. $x \in R - \{0\} : f'(x) = 0, f'(0) = +\infty$

3b. $x \in R - \{0\} : f'(x) = \operatorname{sgn} x, f'_+(0) = 1, f'_-(0) = -1$

3c. $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) : f'(x) = \frac{x}{x^4-1}$

3d. $x \in R - \{\frac{1}{2}, 1\} : f'(x) = \operatorname{sgn} \left(\frac{x-1}{1-2x} \right) \frac{-1}{(1-2x)^2}, f'_+(1) = 1, f'_-(1) = -1$

3e. $x \in (1, +\infty) : f'(x) = \frac{(\ln x)^x}{x \ln x} \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x} \ln x \right)$; lze spoj. rozš. v 1: $\bar{f}(1) = 0$

3f. $x \in R - \{-1, 1\} : f'(x) = \frac{4}{3} \frac{x e^{(1-x^2)}}{\sqrt[3]{1-e^{1-x^2}}}, f'_+(1) = +\infty = f'_-(-1), f'_-(1) = -\infty = f'_+(-1)$

3g. $x \in R - \{0\} : f'(x) = \frac{x e^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}, f'_+(0) = 1, f'_-(0) = -1$

4a. $D_f = \langle -4, \frac{1}{2} \rangle; f'(x) = \frac{6 \operatorname{sgn}(5x+2)}{(x-2)\sqrt{2(x+4)(1-2x)}} \text{ pro } x \neq -\frac{2}{5}; f'_+(-\frac{2}{5}) = +\frac{25}{36}, f'_-(-\frac{2}{5}) = -\frac{25}{36}, f'_+(-4) = -\infty, f'_+(\frac{1}{2}) = +\infty$

4b. $D_f = \cup \langle k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \rangle; f'(x) = \frac{1}{2} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sqrt{\sin x \cos x}} \text{ pro } x \in \cup (k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi); f'_+(2k\pi) = +\infty = f'_+(\pi + 2k\pi), f'_-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -\infty = f'_-(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$

4c. $D_f = (0, +\infty); f'(x) = \frac{\ln x}{x(1+\ln^4 x)\sqrt{\operatorname{arctg}(\ln^2 x)}}; \text{ pro } x \neq 1; f'_+(1) = 1, f'_-(1) = -1$

Dú. $f'(x) = 2(x-a)(x-b)(2x-a-b) \text{ pro } x \in (a, b); f'_+(a) = f'_-(b) = 0; f'_-(a) = -\infty; f'_+(b) = +\infty; f'(x) = 0 \text{ pro } x \in (-\infty, a) \cup (b, \infty)$

Dú. $g'(x) = 2x e^{-x^2} (1-x^2) \text{ pro } x \in (-1, 1); f'_-(1) = f'_+(1) = f'_+(-1) = f'_-(-1) = 0; f'(x) = 0 \text{ pro } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$