

1. Cvičení z MA I. (2.10.2018)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

A. Výroková logika

1. Rozhodněte o pravdivosti a negujte:

- (a) $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{N}$ platí: $z > x \Rightarrow y < z$
- (b) $\exists y \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{N}$ platí: $z > x \Rightarrow y < z$
- (c) $\exists y \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{R}$ platí: $z > x \Rightarrow y < z$

2. Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

- (a) $A \Rightarrow B, \neg B \Rightarrow \neg A, \neg(A \& \neg B), \neg A \vee B$
- (b) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C, A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

3. Který z následujících výroků je 'silnější', tj. implikuje druhý z výroků?

- (a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists K > 0, K \in \mathbb{R}$ takové, že $|f(x+1) - f(x)| \leq K$
- (b) $\exists K > 0, K \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ takové, že $|f(x+1) - f(x)| \leq K$

4. Jak probíhá důkaz? Co je to přímý důkaz, nepřímý důkaz a co důkaz sporem?

B. Absolutní hodnota udává 'vzdálenost' (vlastnosti vzdálenosti).

Ukažte, že pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ platí:

- (a) $|a + b| \leq |a| + |b|$
- (b) $||a| - |b|| \leq |a - b|$
- (c) $|a - b| \leq |a - c| + |c - b|$

C. AG nerovnost: Pro kladná reálná x_1, \dots, x_n platí:

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$$

Dokažte pro $n = 2$ (pro obecná n těžké!).

D. Funkce

Co je relace, zobrazení, funkce? Vlastnosti funkce: omezenost, maxi,u./minimum; funkce prostá a funkce 'na'.

Goniometrické funkce. Logaritmus a exponenciála.

5. Najděte příklady funkcí z \mathbb{N} do \mathbb{N} s následujícími vlastnostmi:

- (a) f_1 je 'na', ale není prostá;
 (b) f_2 je prostá, ale není 'na';
 (c) f_3 je 'na' a každé přirozené číslo má nekonečně mnoho vzorů.

6. Mějme funkci $f(x) = \frac{10}{x^2+2}$ (kde $\log x$ je přirozený logaritmus).
 Rozhodněte, zda f je omezené na svém definičním oboru (příp. omezené shora či zdola) a nabývají maxima a minima (pokud znáte, rozhodněte o supremu/infimu); načrtněte graf funkce.

7. Vyhovuje funkce $f(x) = \sin x$ následujícímu výroku, nebo jeho negaci?

$$\forall \epsilon > 0 \exists K > 0 \forall x : x > K \Rightarrow |f(x)| < \epsilon$$

Na závěr. Řešte rovnice a nerovnice v R :

- (a) $\frac{x-2}{2x-8} \geq 1$ (b) $\frac{x+3}{x-1} \geq \frac{x+1}{x-5}$ (c) $|5x - 2| < x$
 (d) $\frac{|x+1|}{x-1} \geq x$ (e) $||x - 2| + 1| \leq 5$ (f) $|x^2 - 4x + 3| \leq |x^2 - 4|$
 (g) $\log_{\frac{1}{4}} x = \frac{3}{2}$ (h) $\log_a \sqrt{1000} = \frac{3}{2}$
 (i) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 3) \geq 0$ (j) $\cos^2 x > \sin^2 x$

Domácí úkol (termín 8.10.2018, 9:00):

1. Určete reálná čísla a a b tak, aby graf funkce f procházel body A a B :

$$f(x) = a \cdot 2^x + b \quad A = [0; \frac{7}{2}], \quad B = [-1; 2]$$

2. Mějme funkci $f(x) = -|\log x|$ (kde $\log x$ je přirozený logaritmus).

Rozhodněte, zda f je omezené na svém definičním oboru (příp. omezené shora či zdola) a nabývají maxima a minima (pokud znáte, rozhodněte o supremu/infimu); načrtněte graf funkce. Svá tvrzení dokažte!