

8. Cvičení z MA II. (28.3.2018)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Aplikace určitého integrálu

1. Plocha pod křivkou.

Pro křivku $y = f(x)$ (pro $x \in \langle a, b \rangle$) má plocha pod křivkou obsah $\int_a^b f(x) dx$. Je-li křivka dána parametricky $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ (pro $t \in \langle a, b \rangle$; $\phi(t)$ a $\psi(t)$ spojité; $\phi(t)$ ryze mon. se spoj. derivací na $\langle a, b \rangle$), pak je plocha pod touto křivkou $\int_a^b \psi(t)\phi'(t) dt$.

Najděte obsah omezené rovinné oblasti ohraničené křivkami:

- sinusovkou na $\langle 0, \pi \rangle$
- $y = x^2$, $y = x$
- $y = \cos x$, $y = \sin x$, $x = 0$
- $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $y = \frac{1}{1+4x^2}$, $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- Určete plochu obdélníku.

2. Délka křivky.

Délka křivky $y = f(x)$ ($x \in \langle a, b \rangle$) je dána předpisem $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

Délka křivky dané parametricky $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ (pro $t \in \langle a, b \rangle$; $\phi(t)$ a $\psi(t)$ mají spoj. derivace na $\langle a, b \rangle$) je $\int_a^b \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt$.

- Najděte délku křivky $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ na intervalu $x \in \langle 0, 3 \rangle$.
- Spočítejte délku kružnice o poloměru r .

3. Objem rotačního tělesa.

Objem rotačního tělesa vzniklého rotací křivky $y = f(x)$ ($x \in \langle a, b \rangle$) kolem osy x je $\int_a^b \pi f(x)^2 dx$.

- Nechť M je oblast ohraničená grafem funkce $f(x) = \sqrt{x \cdot \sin x}$ a osou x na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací M kolem osy x .
- Ověřte vzorec pro výpočet objemu kužele s poloměrem podstavy r a výškou v .
- Nekonečný “trychtýř” vzniklý rotací funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ pro $x \in \langle 1, \infty \rangle$ kolem osy x .
- Těleso vzniklé rotací funkce $y = \sqrt[3]{x}$ pro $y \in [1, 2]$ kolem osy y .

Tip (nenapadne-li vás něco lepšího): **Guldinovo pravidlo pro objem:** Objem rotačního tělesa vzniklého rotací rovinné množiny M kolem přímky p , neprotínající množinu M , je rovna součinu obsahu množiny M a délky kružnice o poloměru rovném vzdálenosti těžiště množiny M od p .

4. Povrch rotačního tělesa

Povrch tělesa vzniklého rotací křivky $y = f(x)$ ($x \in \langle a, b \rangle$) kolem osy x je $\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

- (a) Paraboloid (satelitní anténa) vzniklá rotací křivky $y = c\sqrt{x}$ pro $x \in \langle 0, b \rangle$.
(Reálné parametry by mohly být $b = 0.3m$, $c = 1.8m^{1/2}$).
- (b) Anuloid vniklý rotací kružnice o poloměru r kolem osy procházející rovinou kružnice a vzdálené R od jejího středu;
- (d) Jednodílný hyperboloid (chladicí věž elektrárny) daný rovnicí $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$
(U Temelína je patní průměr 130.7m, průměr v koruně 82.6 m, výška 155 m. Dost jistě je $a = b$, c už lze dopočítat.)
- (e) Nekonečný “trychtýř” vzniklý rotací funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ pro $x \in \langle 1, \infty \rangle$ kolem osy x .

Tip: **Guldinovo pravidlo pro povrchy:** Plocha rotační plochy vytvořené rotací rovinné křivky ϕ kolem přímky p je rovna součinu délky křivky ϕ a obvodu kružnice o poloměru rovném vzdálenosti těžiště křivky ϕ od p .

5. Odhady sum – integrální kritérium.

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ($s > 0$)
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log n}$
- (c) Odhadněte (pomocí integrálu) velikost $n!$.
Tip: Použijte logaritmus.

Domácí úkol na 3.4.2018:

1. Určete plochu elipsy.
2. Určete délku křivky $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ na intervalu $x \in \langle 0, \gamma \rangle$ (kde $a, \gamma > 0$ parametry)
3. Určete objem anuloidu (duše od pneumatiky) vzniklého rotací kružnice o poloměru r kolem osy procházející rovinou kružnice a vzdálené R od jejího středu.
Tip: rovnice anuloidu $\dots(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2)$