

5. Cvičení z MA II. (24.3.2018)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Určete primitivní funkce k následujícím funkcím:

Rozcvička:

- (a) $\int \frac{\log x}{x(1+\log x)} dx$ (b) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$
(c) $\int \arccos x dx$ (d) $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$

1. Najděte primitivní funkci - Eulerova substituce

$$\int \frac{1}{x+(\sqrt{x^2+x+1})} dx \quad (\text{Nápověda: zkuste substituci } \sqrt{x^2+x+1} = x+t)$$

2. Zvolte vhodnou substituci a spočítejte (na intervalech, které jsou 'přirozeným' definičním oborem výsledných primitivních funkcí):

- (a) $\int \frac{1}{1+\operatorname{tg} x} dx$ (b) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} dx$ (c) $\int \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} dx$
(d) $\int \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 5} dx$ (e) $\int \frac{1}{5+4 \sin x} dx$ (f) $\int \frac{1}{(2+\cos x) \sin x} dx$
(g) $\int \frac{1}{\sin x \cos^4 x} dx$ (h) $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx$

3. Nepříjemné substituce - NEPOVINNÉ:

- (a) $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$ (b) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$ (c) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$
(d) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$ (f) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}} dx$ (g) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+5x+1}} dx$

4. Příklady písemkového typu (doc. Kalenda):

- (a) $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x + 2} dx$ (c) $\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x^2-1)(x^2+x+1)} dx$
(d) $\int \frac{(\operatorname{tg} x + \cotg x)^2}{\sin^2 x - \cos^2 x} dx$ (e) $\int \frac{\sin x}{9 \cos^2 x + 2 \sin^4 x} dx$

Domácí úkol na 20.3.2018:

- (1) $\int \frac{1}{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x} dx$
(2) $\int |\sin x + \cos x| dx$ „Poslepujte“ na celém def. oboru!
(3) $\int \frac{8+6x-2x^2}{x^4-4x+3} dx$

Zopakujte si definice a zatím probrané věty o určitém integrálu.

Řešení: (až na c)

Rozcvička:

- a.** $\log x - \log |1 + \log x|$, na $(0, \frac{1}{e})$ a na $(\frac{1}{e}, \infty)$ **b.** $(x+1) \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}$, na $(0, \infty)$
c. $x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2}$, na $(-1, 1)$ **d.** $-2\sqrt{1-x} \cdot \arcsin \sqrt{x} + 2\sqrt{x}$, na $(0, 1)$

2b. $\sqrt{x^2+x+1} - x + 2 \log |\sqrt{x^2+x+1} - x - 2| - \frac{1}{2} \log |2\sqrt{x^2+x+1} - 2x - 1|$,
na $(-\infty, -1)$ a na $(-1, \infty)$ **2a.** $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \log |\sin x + \cos x|$, na $D_f(x \neq -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$ **2b.** $x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} (\sqrt{2} \operatorname{tg} x)$, platí na D_f mimo body $\frac{\pi}{2} + k\pi$, posun
vždy o $-\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ **2c.** $\frac{-1}{1+\operatorname{tg} x}$, na D_f mimo $\frac{\pi}{2} + k\pi$, lze spoj. dodef. 0 **2d.** $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} (\frac{1}{\sqrt{5}}(3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1))$, mimo $\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, posun vždy o $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$ **2e.** $\frac{2}{3} \operatorname{arctg} (\frac{1}{3}(5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4))$, mimo
 $(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$, posun vždy o $\frac{2\pi}{3}$ **2f.** $\frac{1}{6} \log((1-\cos x)(2+\cos x)^2/(1+\cos x)^3)$, mimo
 $k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ($\equiv \frac{1}{3} \log(|t|(t^2+3))$, kde $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$) **2g.** $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3} \frac{1}{\cos^3 x} + \frac{1}{2} \log \sqrt{\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}}$
($\equiv \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3} \frac{1}{\cos^3 x} + \log |\operatorname{tg} \frac{x}{2}|$), mimo $\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ **2h.** $\log(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1})$, na R

3a. $\log |\frac{1+t}{1-t}| - 2 \operatorname{arctg} t$, kde $t = \sqrt{\frac{x-1}{1+1}}$ **3b.** $\log |x + \sqrt{x^2+1}| = \operatorname{argsinh} x$ na R **3c.** $\log |x + \sqrt{x^2-1}|$ na int. $(-\infty, -1)$ na $(1, \infty)$ **3d.** $\log |t| + \frac{3}{1+2t} - \frac{3}{2} \log |1+2t|$ na R **3e.** vede na $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$ **3f.** $\log |\frac{t-1}{t+1}|$, kde
 $\sqrt{x^2+5x+1} = x+t$, tedy $\log \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-2}$

4a. $\log \frac{t^2+2t+3}{t^2+1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t+1}{\sqrt{2}} - \frac{1+t}{t^2+1} + k \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ na int. $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, kde
 $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; lze "slepit" v krajních bodech (např. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ pro $x = \pi$) **4c.** $-\frac{1}{6} \log |x - 1| - \frac{1}{3(x-1)} + \frac{1}{2} \log |x+1| - \frac{1}{6} \log(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ na $(-\infty, -1)$ a na
 $(-1, 1)$ a na $(1, \infty)$ **4d.** $\operatorname{tg} x + \cotg x + 2 \log |\operatorname{tg} x - 1| - 2 \log |\operatorname{tg} x + 1|$ na int.
 $(\frac{k\pi}{4}, \frac{(k+1)\pi}{4})$ **4e.** $-\frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg} (\sqrt{2} \cos x) + \frac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{\sqrt{2}}$ na R