

## 2. Cvičení z MA II. (28.2.2018)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Co je metoda substituce pro hledání primitivní funkce (2 pravidla)? Jak funguje metoda per partes? Rozklad na parciální zlomky.

Určete primitivní funkce k následujícím funkcím:

1. Substituce:

(a)  $\int \sqrt[3]{1-3x} \, dx$       (b)  $\int \frac{x}{(1+x^2)^2} \, dx$

(c)  $\int \frac{x}{\sqrt{2+5x^2}} \, dx$       (d)  $\int \frac{\log^2 x}{x} \, dx$

(e)  $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}} \, dx$       (f)  $\int x e^{-x^2} \, dx$

(g)  $\int \operatorname{tg} x \, dx$       (h)  $\int \operatorname{cotg} x \, dx$

(i)  $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} \, dx$       (j)  $\int \sqrt{1-x^2} \, dx$

(k)  $\int \frac{(1-x)^3}{x \sqrt[3]{x}} \, dx$

2. Určete primitivní funkce: doplnění na čtverec a rozklad na parciální zlomky.

(i)  $\int \frac{1}{(3x^2-2x-1)} \, dx$       (ii)  $\int \frac{1}{\sqrt{8+6x-9x^2}} \, dx$

(a)  $f(x) = \frac{x^2+2x}{x+3} \, dx$       (b)  $f(x) = \frac{3x+4}{x^2+3x+5} \, dx$

(c)  $f(x) = \frac{1}{(3x+1)(x-1)} \, dx$       (d)  $f(x) = \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} \, dx$

(e)  $f(x) = \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} \, dx$       (f)  $f(x) = \frac{2x}{(x+1)(x^4+2x^2+1)} \, dx$

(g)  $f(x) = \frac{8+6x-2x^2}{x^4-4x+3} \, dx$       (h)  $f(x) = \frac{x}{(x^2+2x+2)^2(x^2+2x-3)} \, dx$

**Tipy pro substituce:**

- 'mocnina' ...  $t = ax^k + b$  ( $dt = akx^{(k-1)} dx$ )
- goniometrické ...  $R = \frac{P}{Q}$ , kde  $P, Q$  polynomy
  - $t = \sin x$ , pokud  $R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, -\cos)$ , tj. 'lichá wrt  $\cos x$ '
  - $t = \cos x$ , pokud  $R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos)$ , tj. 'lichá wrt  $\sin x$ '
  - $t = \operatorname{tg} x$ , pokud  $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos)$ , tj. 'sudá wrt  $\sin x, \cos x$ '
  - $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , univerzální, ale nepříjemná
- odmocnina ...
  - $t = \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ , pro  $R(x, \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}})$ ,  $q \in \mathbb{N}$ ,  $ad - bc \neq 0$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$
  - $t = \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ , pro  ${}^q\sqrt{S^{p_1}}, \dots, {}^q\sqrt{S^{p_n}}$ ;  $S = (\frac{ax+b}{cx+d})$ ;  $s = NSN(q_1, \dots, q_n)$
- eulerova ...  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax} + t$  nebo  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$ ,  
pokud  $ax^2 + bx + c$  nemá  $R$  kořeny a  $a > 0, c > 0$

**Domácí úkol na 6.3.2018:**

- (1)  $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$
- (2)  $\int \log |1 + x| dx$
- (3)  $\int \frac{e^{4x}}{(e^{2x} - 1)^3} dx$

Zopakovat / naučit se / pochopit metodu per partes, obě substituční metody a výpočet primitivní funkce pro racionální lomené funkce!!!

**Řešení:** (až na konstantu  $c$ )

**1a.**  $-\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}$ , na  $R$

**1b.**  $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}$ , na  $R$

**1c.**  $\frac{1}{5} \cdot \sqrt{2+5x^2}$ , na  $R$

**1d.**  $\frac{1}{3} \log^3 x$ , na  $(0, +\infty)$

**1e.**  $\frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{2}$ , na  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

**1f.**  $-\frac{1}{2} e^{-x^2}$ , na  $R$

**1g.**  $-\log |\cos x|$ , na každém  $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ ,  $k \in Z$

**1h.**  $\log |\sin x|$ , na každém  $(k\pi, (k+1)\pi)$ ,  $k \in Z$

**1i.**  $2\sqrt{x} - 2 \log |1 + \sqrt{x}|$  na  $(0, +\infty)$

**1j.**  $\frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2})$ , na  $(-1, 1)$

**1k.**  $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}$ , na  $(-\infty, 0)$  a na  $(0, \infty)$

**2ii.**  $\frac{1}{3} \cdot \arcsin(x - \frac{1}{3})$ , na  $(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$

**2a.**  $\frac{x^2}{2} - x + 3 \ln |x+3|$ , na  $(-\infty, -3)$  a na  $(-3, \infty)$

**2b.**  $\frac{3}{2} \ln(x^2 + 3x + 5) - \frac{1}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{11}}(2x+3)$ , na  $R$

**2c.**  $F(x) = \frac{1}{4} \log |\frac{x-1}{3x+1}|$ , na  $(-\infty, -\frac{1}{3})$  a na  $(-\frac{1}{3}, 1)$  a na  $(1, \infty)$

**2d.**  $\log |x-2| + \log |x+5|$  na  $(-\infty, -5)$  a na  $(-5, 2)$  a na  $(2, \infty)$

**2e.**  $\frac{1}{2}(x+1)^2 + \log |x-1| - \frac{1}{2} \log(x^2+1) - \operatorname{arctg} x$  na  $(-\infty, 1)$  a na  $(1, \infty)$

**2f.**  $F(x) = -\frac{1}{2} \log |x+1| + \frac{1}{4} \log(x^2+1) + \frac{1}{2} \frac{x-1}{x^2+1}$ , na  $(-\infty, -1)$  a na  $(-1, \infty)$

**2g.**

**2h.**  $F(x) = -\frac{1}{50} \log(x^2 + 2x + 2) + \frac{1}{10} \frac{x+2}{x^2+2x+2} + \frac{1}{100} \log |x-1| + \frac{3}{100} \log |x+3| + \frac{7}{50} \operatorname{arctg} (x+1)$ , na  $(-\infty, -3)$ , na  $(-3, 1)$  a na  $(1, \infty)$

**Dů.**

(1)  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2 \sin^2 x - 1) = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2 \cos^2 x - 1)$ , na  $R$

(2)  $x \log |1+x| - x + \log |1+x|$ , na  $(-\infty, -1)$  a na  $(-1, \infty)$

(3)