

## 12. Cvičení z MA II. (9.5.2018)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

### Vázané extrémny – Lagrangeovy multiplikátory.

1. Zjistěte lokální extrémny funkcí na zadaných množinách – využijte Lagrangeovy multiplikátory.

- (a)  $f(x, y) = x + y$  na množině  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\}$
- (b)  $f(x, y) = x$  na množině  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^3 = 0\}$
- (c)  $f(x, y) = y$  na množině  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$
- (d)  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11$   
na množině  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 4x \leq 5\}$

### Věta o implicitních funkcích.

2. Je zadaná funkce  $F(x, y)$  a dvě čísla  $x_0, y_0$  taková, že  $F(x_0, y_0) = 0$ . Dokažte, že v nějakém okolí  $U$  bodu  $(x_0, y_0)$  existuje funkce  $f = f(x)$  splňující podmínky  $f(x_0) = y_0$  a  $F(x, f(x)) = 0$  pro všechna  $x \in U$ . Určete  $f'(x_0)$  a  $f''(x_0)$ .

- (a)  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4$ ,  $(x_0, y_0) = (6, 2)$
- (b)  $F(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 1)$

3. Ukažte, že zadanou množinu  $M$  lze na okolí daného bodu  $a$  popsat jako graf funkce  $f$ . Spočtete její (parc.) derivace prvního a druhého řádu v příslušném bodu.

- (a)  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0\}$  v okolí b.  $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$
- (b)  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \log \sqrt{x^2 + y^2} = \arctg \frac{y}{x}\}$  v okolí b.  $(1, 0)$ , kde  $f(1) = 0$

### Domácí úkol. (15.5.2018)

1. Buď dána funkce  $f(x, y) = \log(x + y^2)$ .

- (a) Najděte definiční obor  $D$  funkce  $f$  a načrtněte jej.
- (b) Vypočítejte gradient funkce  $\nabla f(x, y)$  v bodě  $[0, 1]$ .
- (c) Je funkce  $f$  v bodě  $[1, 1]$  diferencovatelná? Pokud ano, napište její totální diferenciál v tomto bodě.
- (d) Aproximujte hodnotu funkce  $f$  v bodě  $[0, 04; 0, 99]$  pomocí totálního diferenciálu  $D_{f(0,1)}$ .
- (e) Napište rovnici tečné roviny ke grafu  $f$  v bodě  $[0, 1, 0]$ .

**2.** Zjistěte pomocí Lagrangeových multiplikátorů lokální extrémy funkce  $f(x, y) = \sqrt{3}x - y + 2$  na množině  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2x + y^2 = 0\}$ .

**3.** (a) Ukažte, že zadanou množinu  $M$  lze na okolí daného bodu  $a = (2, 1, 0)$  popsat jako graf funkce  $f = f(x, y)$ , kde  $f(2, 1) = 0$ .

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \sin z + y \cos z - e^z = 0\}$$

(b) Spočtěte její (parc.) derivace prvního řádu v příslušném bodu  $a$ .

(c) Napište rovnici její tečny v b.  $(2, 1, 0)$ .