11. Cvičení z MA II. (2.5.2018)

Lokální a globální extrémy funkce, vázané extrémy

1. Najděte všechny lokální extrémy následujících funkcí (na definičním oboru):

(a) $f(x,y) = xy\log(x^2+y^2)$

(b) $f(x,y) = x^2 + |\mathrm{arctg}\, y| - x^8$

(c) $f(x,y) = xy\sqrt{1-x^2-y^2}$

2. Vyšetřete globální extrémy funkce f na množině M.

$f(x,y) = x + 2y + \frac{3}{4}x^2 + xy + 2y^2$ na $M = \{x,y]; y^2 - 2 \le x \le -y^2 + 2\}$

Co to je Hessova matice funkce f v bodě a? Co znamená, že je matice pozitivně / negativně (semi)definitní / indefinitní? Kdy to nastává?

Věta: Spojité funkce na kompaktu nabývají maxima a minima.

Hessova matice je matice 2. derivací (H_f). Platí:
(i) jestliže $\nabla f(a) \neq \bar{0}$, pak f nemá v a extrém;
(ii) jestliže $\nabla f(a) = \bar{0}$ a $H_f(a)$ poz. def., pak f má v a ostré lok. minimum;
(iii) jestliže $\nabla f(a) = \bar{0}$ a $H_f(a)$ neg. def., pak f má v a ostré lok. maximum;
(iv) jestliže $\nabla f(a) = \bar{0}$ a $H_f(a)$ indef., pak f nemá v a lok. extrém.

Sylvestrovo kritérium: Kvadratická forma $q : R^n \to R$ je
(i) poz. definitní, jsou-li všechny hlavní subdeterminanty matice kladné;
(ii) neg. definitní, střídají-li hlavní subdeterminanty znaménka (počínaje záporným);
(iii) indef., jsou-li všechny hlavní subdeterminanty matice nenulové a neplatí (i) ani (ii).

3. Najděte všechny lokální extrémy následujících funkcí:

(a) $f(x,y) = x(3-x^2) - y^2$

(b) $f(x,y) = \frac{x^3}{3} - xy + \frac{y^2}{2}$

(c) $f(x,y,z) = -x^3 + 3xz + 2y - y^2 - 3z^2$

(d) $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$

(e) $f(x,y) = 27xy^2 + 14x^3 - 69x - 54y$

4. Vyšetřete extrémy následujících funkcí na zadané množině:

(a) $f(x,y) = xy^2$ na $M = \{[x,y] \in R^2; x^2 + y^2 = 1\}$

(b) $f(x,y) = \sqrt{3}x - y + 2$ na $M = \{[x,y] \in R^2; x^2 + 2x + y^2 = 0\}$

Domácí úkol na 9.5.2018:

(1) Najděte globální extrémy funkce f na množině M:
$f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11$, $M = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 - 4x \leq 5\}$

(2) Vyšetřete globální a lokální extrémy funkce f na množině M:
$f(x,y) = x^2 - y^2$, $M = \{(x,y) \in R^2 \mid y + e^{-x^2} - 1 = 0\}$

(3) Vyšetřete globální extrémy funkce f na R^2:
$f(x,y) = (x^2 + 7y^2) \cdot e^{-5x^2-2y^2}$