

10. cvičení z MA II. (25.4.2018)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Co to je (**totální**) **diferenciál** funkce $f : G \rightarrow R$ ($G \subset R^n$ otevřená) v bodě $a \in G$ (značíme $Df(a)$)?

Jak souvisí totální diferenciál s parciálními derivacemi?

Jak souvisí totální diferenciál s gradientem?

1. Ověřte podle definice, že lineární funkce $L(h_1, h_2) = 2(h_1 + h_2)$ je diferenciálem funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ v bodě $(1, 1)$.

2. Určete směrové derivace funkce $f(x, y, z) = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3}$ v bodě $(0, 0, 0)$. Rozhodněte, zda v tomto bodě existuje diferenciál.

3. Vyšetřete, zda lze funkci $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2} \log(1+xy)$ dodefinovat v nějakém okolí počátku tak, aby v něm měla diferenciál.

$$f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}$$

4. Vypočtete totální diferenciál funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ v bodě $a = (1, 2, -1)$; jaká bude jeho hodnota ve směru $h = (-1, 1, 1)$?

5. Vypočtete totální diferenciál následujících funkcí f :

$$(a) \quad f(x, y) = e^{xy} \quad (b) \quad f(x, y, z) = xy + yz + xz$$

6. Ukažte, že pro malá x a y platí:

$$(a) \quad (1+x)^m (1+y)^n \approx 1 + mx + ny$$
$$(b) \quad \ln(1+x) \ln(1+y) \approx xy$$

Tečná nadrovina. Necht $G \subset R^n$ otevřená, $a \in G$, $f \in C^1(G)$. *Tečnou nadrovinou ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$ rozumíme graf fce T , $x \in R^n$:*

$$T : x \mapsto f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n)$$

7. Necht $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y - 4$.

Určete tečnu T , která je kolmá k přímce $\{[t, t, t] \in R^3; t \in R\}$. Ve kterém bodě protíná T přímkou $\{(0, 0, t) \in R^3; t \in R\}$?

Domácí úkol na 2.5.2018

1. Buď dána funkce

$$f(x, y) = \arccos \frac{x}{x+y}$$

- a) Najděte definiční obor D funkce f a načrtněte jej.
- b) Určete gradient funkce $\nabla f(x, y)$ v bodě $[1, 1]$.
- c) Je funkce f v tomto bodě diferencovatelná? Pokud ano, napište její totální diferenciál v tomto bodě.
- d) Aproximujte f pomocí diferenciálu v bodě $[1,04; 0,99]$.

2. Anuloid $A = (x^2 + y^2 + z^2 + 12)^2 - 64(x^2 + y^2) = 0$ popište jako sjednocení grafů dvou fci dvou proměnných. Existuje k tomuto anuloidu tečná rovina v bodě $[0, 3, \sqrt{3}]$?

3. Vypočtěte totální diferenciál funkce $f(x, y) = \frac{x}{y}$.