3. Cvičení z MA I. (18.10.2017)

Markéta Lopatková

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

A. Číselné obory – rozhodněte a dokažte:

1. Existuje zobrazení z přirozených čísel do celých čísel $f : N \to Z$, které je 'na'?
Existuje také bijekce $f : N \to Z$?

2. Existuje zobrazení z přirozených čísel do racionálních čísel $f : N \to Q$, které je 'na'?

B. Co je to uspořádání, supremum, infimum, maximum, minimum? Příklad množiny, která má supremum, ale ne maximum; příklad množiny bez suprema.

1. Najděte suprema a infima následujících množin nad reálnými čísly (pokud existují); existují pro ně maxima a minima?

(a) $A_1 = \{-\frac{1}{n};\ n \in N\}$ (b) $A_2 = \{\frac{n+(-1)^n}{n};\ n \in N\}$

(c) $A_3 = \{n^{(-1)^n};\ n \in N\}$ (d) $A_4 = \{q < \sqrt{3};\ q \in Q\}$

(e) $A_5 = \{\frac{p}{p+q};\ p, q \in N\}$ (f) $A_6 = \{n^2 - m^2;\ m, n \in N \ \&\ n > m\}$

2. Mějme množinu X a množinu čísel opačných, tedy $-X = \{-x \mid x \in X\}$. Dokažte, že platí: $\inf\{-x\} = -\sup\{x\}$

3. Nechť $X = \{x \in Q \ |x^2 < 100/49\}$. V tělese $(Q, \leq$ (rac. čísla s obvyklým uspořádáním zlomlů) najděte $\inf X$ a $\sup X$.
Jak se výsledky změní, když Q naheradíme N, Z nebo R?

Bonus. Běžná definice suprema množiny $M \subseteq T$ říká, že je to číslo $s \in T$, které je nejmenší horní závorou.
(Tj. (i) $\forall x \in M : x \leq s$ a (ii) $\forall y \in T, y < s\ \exists x_y \in M : y < x_y$).
Záleží na požadavku, že $y \in T$? Co kdybychom požadovali pouze $y \in M$?
Najděte rozdíl (např. na konkrétním příkladu množiny M).

C. Co to je těleso reálných čísel (dále R)?

1. Z axiomů pro těleso reálných čísel R dokažte, že pro $\forall x \in R$, $\forall y \in R$, $\forall n \in N$ platí:
(a) $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ (b) $-x = (-1) \cdot x$ (c) $(x \cdot y = 0) \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$

2. Příklad konečného tělesa.

Domácí úkol (24.10.2017)

1. Najděte (pokud existují) supremum a infimum množiny $B \subset R$,
   $B = \{\sin x \cos x;\ x \in R\}$; existuje pro ni maximum a minimum? (1 bod)

2. Mějme množinu přirozených čísel $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$ a relaci dělitelnosti ($aRb \Leftrightarrow a|b$). Jde o uspořádání (ostré, neostré, částečné, lineární (=úplné))? (1 bod)

3. Z axiomů pro těleso reálných čísel R dokažte, že pro $\forall x \in R,\ \forall y \in R,\ \forall n \in N$ platí: $(0 \leq x < y) \Rightarrow x^n < y^n$ (1 bod)