

## 1. Cvičení z MA I. (5. 10. 2016)

Markéta Lopatková

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Co je relace, zobrazení, funkce? Vlastnosti relace. Inverzní funkce.  
Absolutní hodnota udává 'vzdálenost' (vlastnosti vzdálenosti).  
Goniometrické funkce. Logaritmus a exponenciála.  
Algebraické vzorce!!

1. Řešte rovnice a nerovnice v  $R$ :

- (a)  $\frac{x-2}{2x-8} \geq 1$       (b)  $\frac{x+3}{x-1} \geq \frac{x+1}{x-5}$       (c)  $|5x-2| < x$   
(d)  $\frac{|x+1|}{x-1} \geq x$       (e)  $||x-2|+1| \leq 5$       (f)  $|x^2-4x+3| \leq |x^2-4|$   
(g)  $\log_{\frac{1}{4}} x = \frac{3}{2}$       (h)  $\log_a \sqrt{1000} = \frac{3}{2}$   
(i)  $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 3) \geq 0$       (j)  $\cos^2 x > \sin^2 x$

2. Určete reálná čísla  $a$  a  $b$  tak, aby graf funkce  $f$  procházel body  $A$  a  $B$ :

- (a)  $f(x) = a \cdot 2^x + b$   $A = [0; \frac{7}{2}]$ ,  $B = [-1; 2]$   
(b)  $f(x) = 2^{a+x} + b$   $A = [1; 15]$ ,  $B = [-2; 1]$

3. Nakreslete grafy funkcí:

- (a)  $|||x| - 1| - 1| - 1|$ ,  $||x - 1|^2 - 1|$ ,  $||x - 1| - 1|^2$   
(b)  $\cos x$ ,  $\cos(x + \pi)$ ,  $\cos(2x + \pi)$ ,  $\sin |x|$ ,  $|\sin x|$   
(c)  $\sin x^2$ ,  $\sin \frac{1}{x}$ ,  $\ln \sin x$ ,  $\ln \ln \sin x$

4. Ukažte, že pro všechna  $a, b \in R$  platí:

- (a)  $|a + b| \leq |a| + |b|$   
(b)  $||a| - |b|| \leq |a - b|$   
(c)  $|a - b| \leq |a - c| + |c - b|$

**5. AG nerovnost:** Pro kladná reálná  $x_1, \dots, x_n$  platí:

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$$

Dokažte pro  $n = 2$ .

**6.** Ukažte, že každý celočíselný obnos větší nebo roven 8 lze vyplatit pětikorunami a tříkorunami.

**7.** Rozhodněte o pravdivosti a negujte:

(a)  $\forall x \in N \quad \exists y \in N \quad \forall z \in N$  platí:  $z > x \Rightarrow y < z$

(b)  $\exists y \in N \quad \forall x \in N \quad \forall z \in N$  platí:  $z > x \Rightarrow y < z$

(c)  $\exists y \in N \quad \forall x \in N \quad \forall z \in R$  platí:  $z > x \Rightarrow y < z$

**8.** Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

(a)  $A \Rightarrow B, \neg B \Rightarrow \neg A, \neg(A \& \neg B), \neg A \vee B$

(b)  $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C, A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

**9.** Který z následujících výroků je silnější?

(a)  $\forall x \in R \quad \exists K > 0, K \in R$  takové, že  $|f(x+1) - f(x)| \leq K$

(b)  $\exists K > 0, K \in R \quad \forall x \in R$  takové, že  $|f(x+1) - f(x)| \leq K$

**10.** Definujte funkci. Definujte zdola a shora omezenou funkci. Definujte maximum a minimum funkce. Pro následující funkce  $f, g$  a  $h$  rozhodněte, zda  
(i) jsou omezené na svém definičním oboru (příp. omezené shora či zdola; případně navrhněte interval, ve kterém omezené jsou);  
(ii) nabývají maxima a minima (pokud znáte, rozhodněte o supremu/infimu);  
(iii) načrtněte grafy funkcí.  
Svá tvrzení dokažte!!

(a)  $f(x) = \frac{10}{x^2+2}$

(b)  $g(x) = -|\log x|$  (kde  $\log x$  je přirozený logaritmus)

(c)  $h(x) = f(x) + g(x)$