

11. Cvičení z MA I. (21.12.2016)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Co je to funkce? Jak se definuje limita funkce v bodě? Kdy je funkce spojitá?

1. Dokažte, že funkce f je na intervalu I rostoucí, právě když platí

$$\forall x, y \in I, x \neq y : \frac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0$$

2. Dokažte, že je-li f neklesající na $(-\infty, a)$ a nerostoucí na $\langle a, +\infty)$ pro nějaké $a \in R$, pak f nabývá maxima.

3. Nechť f nabývá minima v $a \in R$. Musí existovat $\epsilon > 0$ takové, že f je nerostoucí na $(a - \epsilon, a)$ a neklesající na $\langle a, a + \epsilon)$?

4. Které z následujících operací provedených na neklesající funkce f, g dává opět neklesající funkci?

$$(a) \quad f + g \quad (b) \quad f - g \quad (c) \quad \max\{f, g\} \quad (d) \quad \min\{f, g\} \quad (e) \quad f \circ g$$

5. Spočítejte limity nebo dokažte, že neexistují.

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}, \text{ pokud } a = 0, 1, +\infty, -\infty \\ [1 \text{ pro } a = 0; 2/3 \text{ pro } a = 1; 1/2 \text{ pro } a = +\infty]$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} \quad \left[\frac{1}{2}\right] \quad (c) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}} \quad \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{10}\right]$$

$$(d) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^3-x^2-x+1} \quad [neex.] \quad (e) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} \quad \left[\frac{3}{2}\right]$$

$$(f) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} \quad (n \in N) \quad \left[\frac{1}{n}\right] \quad (g) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m-1}{x^n-1} \quad (m, n \in N) \quad \left[\frac{m}{n}\right]$$

$$(h) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+x^2+\dots+x^n-n}{x-1} \quad \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right] \quad (i) \quad \lim_{x \rightarrow 1} (\lfloor x \rfloor - x) \quad [neex.]$$

$$(j) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \quad [1] \quad (k) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1} \quad (m, n \in N) \quad \left[\frac{n}{m}\right]$$

$$(l) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} \quad \left[\frac{1}{2}mn(n-m)\right]$$

6. Spočítejte následující limity:

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1} \quad [-\infty] \quad (b) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \left(\pi \cdot \frac{4\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}}{2\sqrt{x^2+1}} \right) \quad [0]$$

$$(c) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} x \cdot (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) \right) \quad [-1]$$

$$\begin{aligned}
\text{(d)} \quad \lim_{x \rightarrow 16} \sqrt{\frac{4-\sqrt{x}}{64-\sqrt{x^3}}} \quad \left[\frac{1}{4\sqrt{3}}\right] & \quad \text{(e)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\sqrt[3]{1-x^2}-1}{5x^2}} \quad \left[e^{-\frac{1}{15}}\right] \\
\text{(g)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\cos x + 2}{x^2 + x}} \quad [0] & \\
\text{(h)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arccotg} x}{x} \quad [0] & \quad \text{(i)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2-x}\right)\right)^2 \quad \left[\frac{\pi^2}{4}\right]
\end{aligned}$$

7. Ukaŕte, ŕe platí (a zapamatujte si !!!):

$$\text{(a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \quad \text{(c)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

8. Spočítejte následující limity:

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x^2)}{x \cdot \sin 3x} \quad \left[\frac{1}{3}\right] & \quad \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^{3x} - 1}{\ln(x+1)} \quad [3 \ln 4] \\
\text{(c)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 1}{\sin x} \quad [\text{neex.}] & \quad \text{(d)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2^{\frac{1}{x}} - 1\right) \quad [\ln 2] \\
\text{(e)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-x^2)} \quad [-1] & \quad \text{(f)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\arcsin(x-3)}{x^2 - 3x} \quad \left[\frac{1}{3}\right] \\
\text{(g)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+2}{2x+3}\right)^{2x-1} \quad [+\infty] & \quad \text{(h)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2+7}\right)^x \quad [1] \\
\text{(i)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-4^x}{\sin 2x} \quad [-\ln 2] & \quad \text{(j)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}} \quad [1] \\
\text{(k)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} \quad [0] &
\end{aligned}$$

Dú. (3.1.2017) Spočítejte limity nebo dokaŕte, ŕe neexistují.

$$\begin{aligned}
(1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \sqrt{(x+a)(x+b)} - x \right\} \quad (a, b \in \mathbb{R}) \quad \left[\frac{1}{2}(a+b)\right] & \\
(2) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1} \quad [-3] & \\
(3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + 8^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \quad [4] &
\end{aligned}$$