

9. Cvičení z MA I. (6. 12. 2017)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Co je to funkce? Jak se definuje limita funkce v bodě? Kdy je funkce spojitá? Kdy je funkce rostoucí?

1. Dokažte, že funkce f je na intervalu I rostoucí, právě když platí

$$\forall x, y \in I, x \neq y : \frac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0$$

2. Dokažte, že je-li f neklesající na $(-\infty, a)$ a nerostoucí na $(a, +\infty)$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$, pak f nabývá maxima.

3. Nechť f nabývá minima v $a \in \mathbb{R}$. Musí existovat $\epsilon > 0$ takové, že f je nerostoucí na $(a - \epsilon, a)$ a neklesající na $(a, a + \epsilon)$?

4. Které z následujících operací provedených na neklesající funkci f, g dává opět neklesající funkci?

$$(a) \quad f + g \quad (b) \quad f - g \quad (c) \quad \max\{f, g\} \quad (d) \quad \min\{f, g\} \quad (e) \quad f \circ g$$

5. Spočítejte limity nebo dokažte, že neexistují.

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}, \text{ pokud } a = 0, 1, +\infty, -\infty$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} \quad (c) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}} \quad (d) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^3-x^2-x+1}$$

$$(e) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \quad (f) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \quad (g) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3}$$

$$(h) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \quad (i) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \quad (j) \quad \lim_{x \rightarrow 1} ([x] - x) \quad (k) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$$

6. Rozhodněte, zda je v bodě $x = 0$ možné spojitě dodefinovat funkci, která je na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dána předpisem: $f(x) = e^{|x|}$.

7. Další příklady – spočítejte limity nebo dokažte, že neexistují.

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \left[\frac{1}{n} \right] \quad (b) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m-1}{x^n-1} \quad (m, n \in \mathbb{N}) \quad \left[\frac{m}{n} \right]$$

$$(c) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+x^2+\dots+x^n-n}{x-1} \quad \left[\frac{1}{2}n(n+1) \right] \quad (d) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt{x}-1} \quad (m, n \in \mathbb{N}) \quad \left[\frac{n}{m} \right]$$

$$(e) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} \quad \left[\frac{1}{2}mn(n-m) \right]$$

8. A ještě další příklady – spočítejte následující limity:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1} \quad [-\infty] \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \left(\pi \cdot \frac{4\sqrt{x-3}\sqrt[3]{x}}{2\sqrt{x^2+1}} \right) \quad [0]$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} x \cdot (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) \right) \quad [-1]$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 16} \sqrt{\frac{4-\sqrt{x}}{64-\sqrt{x^3}}} \quad \left[\frac{1}{4\sqrt{3}} \right] \quad (e) \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\sqrt[3]{1-x^2}-1}{5x^2}} \quad \left[e^{-\frac{1}{15}} \right]$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\cos x + 2}{x^2 + x}} \quad [0]$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arccotg} x}{x} \quad [0] \quad (h) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2-x} \right) \right)^2 \quad \left[\frac{\pi^2}{4} \right]$$

Zapamatujte si, že platí! (dokážeme později):

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Dú. (12.12.2017) Spočítejte limity nebo dokažte, že neexistují.

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \sqrt{(x+a)(x+b)} - x \right\} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + 8^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (\text{tip: převedte na přirozanou mocninu})$$