6. Cvičení z MA I. (14.11.2017)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

1. Spočítejte následující limity:

(a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2})$ (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{i}{n} \cdot \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$ (i je imaginární číslo)

(c) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{\sqrt{n^7} + \sqrt[3]{n^7}} - \sqrt[3]{\sqrt{n^7} - \sqrt[3]{n^7}}\right)$

(d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}, \quad a, b, c \in R^+$

2. Určete limity v závislosti na parametrech $k, l \in N$, $a, b \in R$, $|a| < 1, |b| < 1$:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k - (n-1)^l}{n^k + n^l}$ (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k + n^{k-l} + \ldots + n + 1}{n^l + n^{l-l} + \ldots + n + 1}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n + a^{n-l} + \ldots + a + 1}{b^n + b^{n-l} + \ldots + b + 1}$

3. Dokažte, zda následující rekurentně zadaná posloupnost $\{a_n\}$ má limitu, případně ji spočítejte:

(a) $a_1 = \sqrt{c}$ $(c > 0,\ c \in R)$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + c}$ pro každé $n \in N$

(b) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ pro každé $n \in N$

4. Zjistěte, pro která reálná čísla x je následující posloupnost monotonní:

$$\left\{ \left(\frac{x^3}{3x-2}\right)^n \right\}$$

Dú na 21.11.2017:

1. Spočítejte: $\lim_{n\to\infty} \frac{n + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor^3}{n - \lfloor \sqrt{n+9} \rfloor}$

2. Určete limity v závislosti na $k, l \in N$: $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k + (-n)^l}{(n-1)^k - n^l}$

3. Dokažte, že následující rekurentně zadaná posloupnost $\{a_n\}$ má limitu; tuto limitu spočítejte:
$a_1 = t$ ($t > 0$ je parametr), $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$ pro každé $n \in N$

Naučit se definice a věty týkající se číselných řad!

Řešení:

1a. 0   1b. 0   1c. $\frac{2}{3}$ 1d. $\max a, b, c$

2a. 1 pro $k > l$, -1 pro $k < l$, 0 pro $k = l$

4. konst. pro $x \in \{-2, 0, 1\}$, rost. pro $x \in (-\infty; -2) \cup (\frac{2}{3}; 1) \cup (1; +\infty)$, kles. pro pro $x \in (-2; 0)$