

## 5. Cvičení z MA I. (1.11.2017)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

1. Typové příklady – spočítejte následující limity (nebo dokažte, že neexistují):

$$\begin{aligned} \text{(a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5n}{-n^2 + 4n} & \quad \text{(b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5^n + 10^n}{-2^{n+1} + 5^{n+1} + 10^{n+1}} \\ \text{(c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+5} - \sqrt{n-1} & \quad \text{(d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2} \\ \text{(e)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sqrt{n}|}{\sqrt{n}} & \quad \text{(f)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k}{n+2} - \frac{n}{2} \end{aligned}$$

2. ‘Škála limit’ – určete, čemu se rovnají následující limity (pro  $q \in R$ ,  $k \in N$ ):

2A. geometrická posloupnost, součin s polynomem:

$$\text{(a)} \lim_{n \rightarrow \infty} q^n \quad \text{(b)} \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot q^n \quad \text{(c)} \lim_{n \rightarrow \infty} n^k \cdot q^n$$

2B. n-tá odmocnina:

$$\text{(d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}, a \in R, a \geq 0 \text{ (znáte)} \quad \text{(e)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \quad \text{(f)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$$

2C. mocniny a faktoriál:

$$\text{(g)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n!} \quad \text{(h)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad \text{(i)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n!}$$

3. Další příklady na procvičení – spočítejte následující limity (nebo dokažte, že neexistují):

$$\begin{aligned} \text{(a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4 + (-1)^n}{-7} \right)^n & \quad \text{(b)} \lim_{n \rightarrow \infty} (n + \cos(n^2)) & \quad \text{(c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + (-2)^n}{3^n} \\ \text{(d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + 2}{2^n(3 - (-1)^n)} & \quad \text{(e)} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 - n} - 2n) & \quad \text{(f)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{2n+5} - 3\sqrt[3]{2n}}{\sqrt{n^3+2} + \sqrt[3]{n^4}} \\ \text{(g)} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 3}) & \quad \text{(h)} \lim_{n \rightarrow \infty} (n - 5 \cdot \lfloor \frac{n}{5} \rfloor) & \quad \text{(i)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - 5 \cdot \lfloor \frac{n}{5} \rfloor)}{n} \end{aligned}$$

4. Další příklady na počítání – určete následující limity (nebo dokažte, že neexistují):

$$\begin{aligned} \text{(a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^5}{n^6 + n!} & \quad \text{(b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} \cdot (2^n - n)}{(n^2 - n + 1)(n! + \ln n)} \\ \text{(c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{2}{3}} \sin n!}{n+1} & \quad \text{(d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2n^n + n!}{(n+1)^4 + \sin n + (3n)!} \\ \text{(e)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} & \quad \text{(f)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 4n + n \sin n}{n \cos 3n + (2n + \sin n)^2} & \quad \text{(g)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k}{\sqrt[3]{8n^6 - n}} \\ \text{(h)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \lfloor xk \rfloor}{n^2} & \quad \text{(parametr } x \in R, \lfloor x \rfloor \dots \text{ celá část } x) \end{aligned}$$

**Domácí úkol** (na 7.11.2017):

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^3}{n^4}$  (viz též cvičení 2; 1 bod)

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$  (1 bod)

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2} - \sqrt[2]{n^3+1}}$  (1 bod)

**Řešení:**

1a.  $-3$  1b.  $\frac{1}{10}$  1c.  $0$  1d.  $0$  1e.  $1$  1f.  $\frac{1}{2}$   
3a.  $0$  3b.  $+\infty$  3c.  $0$  3d.  $0$  3e. 3f. 3g.  $\frac{1}{2}$  3h. neex. 3i.  $0$   
4a.  $0$  4b.  $0$  4c.  $0$  4d.  $0$  4e.  $1$  4f.  $-\frac{1}{2}$  4g.  $\frac{1}{4}$  4h.  $\frac{x}{2}$