

2. Cvičení z MA I. (11.10.2017)

Markéta Lopatková

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Jak probíhá důkaz **matematickou indukcí**? (A jaké další typy důkazů znáte?)

1. Dokažte, že pro všechna přirozená n platí:

$$(a) \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (b) \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(c) \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad (= \sum_{k=1}^n k)^2$$

$$(d) \quad \text{Vypočítejte } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \quad (e) \quad \text{Vypočítejte pro } x \in \mathbb{R}: \quad \sum_{k=1}^n x^k$$

2. Dokažte tzv. de Morganova pravidla pro množiny A a B_i ($i = 1 \dots n$):

$$(a) \quad A \setminus \bigcap_{i=1}^n B_i = \bigcup_{i=1}^n (A \setminus B_i)$$

$$(b) \quad A \setminus \bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcap_{i=1}^n (A \setminus B_i)$$

3. Dokažte pomocí matematické indukce, že pro všechna přirozená n a reálná $x > -1$ platí tzv. **Bernoulliho nerovnost**:

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

3'. **AG nerovnost**: Pro kladná reálná x_1, \dots, x_n platí:

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$$

Dokažte pro $n = 2$ (pro obecná n těžké!).

4. Dokažte pro všechna přirozená n :

$$(a) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n} \quad \text{pro } n \geq 2 \qquad (b) \quad (2n)! < 2^{2n}(n!)^2$$

5. Dokažte pro všechna přirozená n a reálná x taková, že $0 \leq x_k \leq \pi$:

$$|\sin(\sum_{k=1}^n x_k)| \leq \sum_{k=1}^n \sin x_k$$

6. **Vlastnosti zobrazení.**

- (a) Mějme množinu A . Je-li A konečná, pak funkce z A do A je prostá právě tehdy, když je 'na'.
- (b) Pro nekonečné množiny to neplatí – najděte například funkci z přirozených čísel do přirozených čísel, která (i) je prostá a není 'na', (ii) není prostá a je 'na' a která (iii) je 'na' a navíc má každá prvek nekonečně mnoho vzorů.

7. Mějme zobrazení $f : X \rightarrow Y$ a množiny $A, B \subset X$. Jaké musí mít f, A, B vlastnosti, aby platily následující vztahy?

- (a) $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$ (b) $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$
(c) $f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$ (d) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$

Domácí úkol (termín 17.10.2017, 14:00):

1. Dokažte pro všechna přirozená n (1 bod za každou nerovnost):

(a) $n^2 \leq 2^n$

(b) $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

(Platí též odhad faktoriálu zdola $\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n!$, kde e je základ přirozeného logaritmu (pro důkaz potřeba následující nerovnost $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$.)

2. Pro která zobrazení $f : X \rightarrow Y$ platí následující tvrzení?

(a) $\forall M \subset X \quad f^{-1}(f(M)) = M$ (b) $\forall N \subset Y \quad f(f^{-1}(N)) = N$