8. Cvičení z MA II. (12.4.2017)

`ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054`

Spojitost. Jak se definuje spojitá funkce (různé definice)?

1. Ukažte, že polynomy více proměnných jsou spojité funkce $P : R^n \to R$.

2. Jsou následující fce spojité? Nabývají na R^2 své největší a nejmenší hodnoty? Jaké?

(a) $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ pro $[x, y] \neq [0, 0]$, $f(0, 0) = 0$

(b) $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ pro $[x, y] \neq [0, 0]$, $f(0, 0) = 0$

(c) $f(x, y) = (x + y)^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

(d) $f(x, y) = \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(e) $f(x, y) = \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$

Parciální derivace. Nechť $f : G \subset R^n \to R$, G je otevřená, $a \in G$ a $e^i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots 0]$ je i-tý vektor kanoniclé báze R^n. *Parciální derivací fce f podle i-té proměnné v bodě a* rozumíme číslo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te^i) - f(a)}{t}$$

(pokud tato limita existuje).
Značení: $C^1(G)$ ... množina fcí, které mají pro každý bod $a \in G$ spojité parc. derivace podle všech proměnných (tj. fce $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ jsou spojité jako fce n proměnných).

1. Určete definiční obor následujících funkcí na R^n, vyšetřete jejich spojitost a vypočtěte parciální derivace všude, kde existují:

(a) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$

(b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2} + 1$

(c) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ pro $[x, y] \neq 0$, $f(0, 0) = 0$

2. Určete definiční obor následujících funkcí a vypočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu všude, kde existují. V zadaném bodě vyčíslete.

(a) $f(x, y, z) = (\frac{x}{y})^z$, v bodě $[e, 1, 2]$

(b) BONUS: $F(x,y) = g(xy, \frac{x}{y})$ v bodě $A = (3,2)$.

3. Druhé parciální derivace se mohou lišit v závislosti na pořadí derivací:

$f(x,y) = xy$ pro $|x| \geq |y|$ a $f(x,y) = 0$ pro $|x| < |y|$

Domácí úkol na 18.4.2017:

1. Vyšetřete spojitost funkce $f(x,y) = \frac{\sin x + \sin y}{x+y}$ na R^2.
2. Určete definiční obor následující funkce, vyšetřete jejich spojitost a vypočtěte parciální derivace všude, kde existují
   $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pro $[x,y] \neq 0$, $f(0,0) = 0$
3. Určete definiční obor následující funkce a vypočtěte parciální derivace 1. a 2. řádu všude, kde existují.
   $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{x+y}$

Řešení:

2a. není spojitá v b. $[0,0]$, omezená
2b. spojitá, není omezená
2c. spojitá pro $f([0,0]) := 0$
2d. spojitá pro $f([0,0]) := 0$
2e. nelze spojitě dodefinovat v b. $[0,0]$

1a. spojitá na R^2
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{y\cdot \mathrm{sgn}(xy)}{\sqrt{|xy|}}$ pro $x \neq 0,\ y \neq 0$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{x\cdot \mathrm{sgn}(xy)}{\sqrt{|xy|}}\cdot$ pro $x \neq 0,\ y \neq 0$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ neex. pro $y \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$ pro $y \neq 0$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0$ pro $x \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ neex. pro $x \neq 0$

1b. spojitá na R^2
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+4y^2}}$ pro $[x,y] \neq [0,0]$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{8y}{\sqrt{x^2+4y^2}}$ pro $[x,y] \neq [0,0]$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ neex., $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ neex.

1c. spojitá na R^2
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) - \frac{2x}{x^2+y^2}\cdot\cos(\frac{1}{x^2+y^2})$ pro $[x,y] \neq [0,0]$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) - \frac{2y}{x^2+y^2}\cdot\cos(\frac{1}{x^2+y^2})$ pro $[x,y] \neq [0,0]$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

2a. $T(x,y,z) = e^2 + 2e(x-e) - 2e^2(y-1) + e^2(z-2)$, $D_f : x\cdot y > 0$

Dú 1. spojitá pro $f([a,-a]) := \cos a \quad \forall a \in R$
Dú 2. spojitá na R^2
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ pro $[x,y] \neq [0,0]$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ pro $[x,y] \neq [0,0]$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Dú 3. $2z - x + y = 0$, $D_f : x \neq -y$