

7. Cvičení z MA II. (29.3.2017)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Určitý integrál. Jak se definuje Riemannův integrál?

1. Riemannův určitý integrál z definice:

(a) $(R) \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx$ (b) $(R) \int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(x) \, dx$

(c) $(R) \int_{-2}^2 [x] \, dx$, kde $[x]$ je celá část x

Kdy je funkce R-integrovatelná?

Jak se definuje Newtonův integrál, kdy je funkce N-integrovatelná?

2. Určitý integrál pomocí primitivní funkce:

(a) $(N) \int_0^1 x^\alpha \, dx$, $\alpha \in R$ (b) $(N) \int_0^\infty \sin x \, dx$

(c) $(N) \int_{-\sqrt{3}}^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx$ (d) $(N) \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ (e) $(N) \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

(f) $(N) \int_0^8 \sqrt{1+x} \, dx$ (g) $(N) \int_0^\pi \frac{\sin 2x}{\sin x} dx$ (h) $(N) \int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{1}{x^2-2x+2} \, dx$

(i) $(N) \int_0^5 |x^2 - 3x + 2| \, dx$

3. Per partes a substituce pro urč. integrál (vs. primitivní fce):

(a) $\int_1^e x^2 \ln x \, dx$ (b) $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx$ (c) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 x \cos x \, dx$

(d) $\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^2 x \, dx$ (e) $\int_0^\pi \frac{1}{1+3 \sin^2 x} \, dx$

Dů. Spočítejte (na 4.4.2017)

(a) $\int_3^5 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} \, dx$ (b) $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \, dx$ (c) $\int_0^a |\cos x| \, dx$, kde $a = \frac{49}{6} \pi$

Řešení:

1a. 2π 1c. -2

2a. pro $\alpha \leq -1$ neex., pro $\alpha > -1$... $\frac{1}{\alpha+1}$ 2b. neex. 2c. $\frac{7\pi}{12}$ 2d. $\frac{\pi}{3}$ 2e. $-\frac{\pi}{3}$

2f. $\frac{52}{3}$ 2g. 0 2h. $\frac{\pi}{12}$ 2i. $\frac{29}{2}$ 2j. $\frac{33}{2}$

3a. $\frac{1}{9}(2e^3 + 1)$ 3b. $\frac{1}{4}(\pi - 2)$ 3c. 2^{-6} 3d. $\frac{\pi}{4}$ 3e. $\frac{\pi}{2}$