

2. Cvičení z MA II. (1.3.2017)

ufal.mff.cuni.cz/course/nmai054

Co jsou to primitivní funkce? Jaké má vlastnosti (spojitost)? Kdy má funkce primitivní funkci (spojitost)?

1. Určete primitivní funkce k následujícím funkcím (na největších možných intervalech):

$$(a) \int x^3 + 2x + \frac{16}{x} dx \quad (b) \int 18e^x + 16e^{8x} - \frac{1}{x} + 3 \cos x dx \quad (c) \int \cos^2 \frac{x}{2} dx$$

$$(d) \int (3e^x + \frac{1}{x}) dx \quad (e) \int (\frac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{x}) dx \quad (f) \int \frac{x^2-1}{x} dx$$

$$(g) \int (\sqrt[3]{x} + x^2) dx \quad (h) \int \operatorname{tg}^2 x dx \quad (i) \int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx$$

2. Per partes:

$$(a) \int (x^2 - x) \exp(x) dx \quad (b) \int x \sin x dx$$

$$(c) \int e^x (\sin x + \cos x) dx \quad (d) \int \sqrt{x} \log^2 x dx$$

$$(e) \int \sin^7 x \cos x dx \quad (f) \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

$$(g) \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx \quad (h) \int x^n e^x dx, \text{ kde } n \geq 0$$

3. 'Lepení' primitivních funkcí:

$$(a) \int |x| dx \quad (b) \int f(x) dx, \text{ kde } f(x) = 0 \ (x \leq 0), \ f(x) = x \ (x > 0)$$

$$(c) \int \sqrt{x^6} dx \quad (d) \int |\cos x| dx$$

Domácí úkol na 7.3.2017:

Vypočítejte na celém intervalu, kde to dává smysl:

$$(1) \int \frac{1}{(x-a)^n} dx, \text{ kde } n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$$

$$(2) \int |\sin x + \cos x| dx$$

$$(3) \int 5^x \sin x dx$$

Řešení: (až na c)

1a. $\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 16 \log |x|$, na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$

1b. $18e^x + 2e^{8x} - \log |x| + 3 \sin x$, na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$

1c. $\frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2}$, na R

...

2a. $(x^2 - 3x + 3) \exp x$, na R

2b. $\sin x - x \cos x$, na R

2c. $e^x \sin x$, na R

2d. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}(\log^2 x - \frac{4}{3} \log x + \frac{8}{9})$, na $(0, +\infty)$

2e. $\frac{1}{8} \sin^8 x$, na R

2f. $\frac{1}{2}(\frac{x}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x)$, na R

2g. $I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n$, pro $n \in N$ na R

2h. $J_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \cdot x^{n-k}$

3a. $\operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{x^2}{2}$, na R

3b. $F(x) = c$ na $< -\infty, 0 >$, $F(x) = \frac{x^2}{2}$ na $< 0, \infty >$

3c. $\frac{1}{4}|x| \cdot x^3$, na R

3d. $(-1)^k \sin x + 2k$, na $x \in < -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi >$, $k \in Z$